

УДК 624.073.5

**ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
ЛЕГКОБЕТОННИХ КОМБІНОВАНИХ ПЛИТ ЗА НЕКЛАСИЧНОЮ ЗСУВНОЮ
МОДЕЛЛЮ**

Д-р техн. наук О. П. Воскобійник, асп. О. В. Череднікова (ПолтНТУ)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ЛЕГКОБЕТОННЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ ПЛИТ ПО
НЕКЛАССИЧЕСКОЙ СДВИГОВОЙ МОДЕЛИ**

Д-р техн. наук О. П. Воскобойник, асп. А. В. Чередникова (ПолтНТУ)

**A DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF STRESS-STRAINED STATE OF
LIGHT CONCRETE COMBINED SLABS FOR NON-CLASSICAL SHEAR MODEL**

Dr. sc. Sciences O. P. Voskobiinyk, graduate student O. V. Cherednikova

Доопрацьовано некласичну зсувну модель визначення фізико-механічних характеристик поперечних перерізів неоднорідної структури і застосовано її для розрахунку легкобетонних комбінованих плит із профільованим настилом. Розрахунок за універсальною зсувною моделлю дає змогу визначити параметри напружено-деформованого стану у будь-якій точці зразка плити та дослідити їх зміну при різних умовах навантаження.

Ключові слова: легкобетонні комбіновані плити, депланація, ітераційна модель, деформації зсуву, згин.

Доработана неклассическая сдвиговая модель определения физико-механических характеристик поперечных сечений неоднородной структуры и применена для расчета легкобетонных комбинированных плит с профилированным настилом. Расчет по универсальной сдвиговой модели позволяет определить параметры напряженно-деформированного состояния в любой точке образца плиты и исследовать их изменение при различных условиях нагрузки.

Ключевые слова: легкобетонные комбинированные плиты, депланация, итерационная модель, сдвиговые деформации, изгиб.

The non-classical shear model for determination of the parameters of stress-strained state (SSS) of slabs with a non-uniform cross-section was improved. The improvement concerned the expressions for determination of the stresses functions of trough-thickness distribution of the cross-section and the physical and mechanical characteristics of the cross-sections. The holes into the cross-section were account for these obtained mathematical expressions. For this purpose, with the help of the apparatus of generalized functions, a discrete function is introduced which allows determining the width of the cross-section at the appropriate trough-length coordinate. After inputting the width function, the subintegral expressions of the stress distribution functions at the trough-length of the cross were converted and the corresponding integrals were found. The executed transformations allowed to correct the error that arose in the calculation of slabs in a non-classical shear model with holes in the cross-section. The refined model is used for calculation of light concrete combined slabs with profiled steel sheeting. The performed calculations allowed to defined new features in the distribution of the parameters of the stress-strained state, such as the

change of the trough-length distribution of stresses of the cross-section and the length distribution of stresses of the slab. They also confirmed the possibility of applying a refined non-classical shear model to calculate light concrete combined slabs, and studying the parameters of the stress-strained state at any point and under different loading and fixing conditions.

Keywords: *light concrete combined slabs, the iteration model, warping, shear deformation, bending.*

Вступ. На сьогоднішній день в Україні гостро постає питання енергозбереження в будівництві. Тому використання плит перекриття з легкого бетону з профільованим настилом, як конструктивно-теплоізоляційного матеріалу, є досить актуальним завданням. Легкобетонні комбіновані плити з профільованим настилом [12, 13] являють собою неоднорідні композитні конструкції, що поєднують у собі сталеві профільовані листи та легкі (в тому числі теплоізоляційні) бетони [14], які працюють сумісно у складі перекриттів (покриттів) будівель, забезпечуючи несучу та огорожувальну (теплозахисну) функції [15]. Тому необхідно мати надійні та доведені до практичного застосування методи розрахунку, які б урахували неоднорідну структуру елементів конструкцій, реальні схеми їх завантаження, крайові умови тощо. Від урахування цих факторів залежить правильність визначення параметрів напружено-деформованого стану (НДС) таких конструктивних елементів. Проте параметри НДС суттєво залежать від впливу характерних для комбінованих конструкцій деформацій поперечного зсуву. Ці деформації викликають депланацію поперечних перерізів і можуть бути зумовлені як фізико-механічними та геометричними його характеристиками, так і характером навантаження й умовами закріплення. Тому модель деформування легкобетонних плит, яка базується на гіпотезі плоских перерізів, може виявитися непридатною для розрахунку плит з неоднорідною або композитною будовою поперечного перерізу. Отже, є актуальним розроблення точного розрахунку таких

конструкцій, що своєю чергою потребує застосування неklasичних моделей, які враховують деформації поперечного зсуву та неоднорідність будови плитного елемента по перерізу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Створенню неklasичних моделей розрахунку з урахуванням деформацій поперечного зсуву для неоднорідних конструкцій присвячені роботи Тимошенка С.П. [11], Амбарцумяна С.О. [1], Григолюка Е.І. [3], Рейсснера Е. [10], Reddy J. [9], Carrera E. [4], Піскунова В. Г., Горика О. В., Череднікова В.М. [2, 6, 7, 8] та інших авторів. Проте однією із основних проблем, що стримують їх широке використання для розрахунку легкобетонних комбінованих плит з профільованим настилом, є складність визначення фізико-механічних характеристик поперечних перерізів.

Розробленням універсальних підходів щодо визначення фізико-механічних характеристик поперечних перерізів займалися Піскунов В. Г., Горик О. В., Серов М. І., Ляхов О.Л. та Чередніков В.М., але в їхній моделі не врахований коректний перерахунок ширини поперечного перерізу при наявності в перерізі пустот, що є характерним для перерізів комбінованих плит [13]. Проте запропоновані в [2, 6, 7, 8] підходи можуть служити підґрунтям для розроблення методів визначення параметрів напружено-деформованого стану легкобетонних комбінованих плит із профільованим настилом.

Визначення мети та задачі дослідження. Основною метою даного дослідження є удосконалення неklasичної зсувної моделі [2, 6, 7, 8] для врахування порожнин і коректного визначення ширини поперечного перерізу та її застосування для

розрахунку легкобетонних комбінованих плит із профільованим настилом.

Застосовуючи сучасні аналітичні методи, зокрема методи узагальнених функцій, можна реалізувати прикладну (інженерну) методику розрахунку неоднорідних конструкцій. При цьому така методика може ґрунтуватися як на гіпотезі плоских перерізів, так і на гіпотезах, що враховують депланації поперечних перерізів. На основі таких методів у роботах [2, 6, 7, 8] була побудована депланаційна ітераційна модель. Однак, у цих роботах не приділено належної уваги методам урахування неоднорідності поперечного перерізу і визначення його фізико-механічних характеристик (ФМХПП), що є метою даної роботи.

Основна частина дослідження

Вихідні умови. Розглянемо елемент легкобетонної комбінованої плити з неоднорідною (композитною) структурою поперечного перерізу (рис. 1). Розташу-

вання початку координат за висотою перерізу може бути довільним.

Нехай у плитному елементі є включення – фази матеріалу, які відрізняються фізико-механічними властивостями і зв'язані нерозривністю переміщень на границях фаз. Характеристики матеріалів і розміри фаз можна задавати так, щоб змодельовати різноманітну взаємодію на границях фаз, наприклад, клейові з'єднання, тріщини, відсутність з'єднання і т. ін.

Змодельовано переріз плити таким чином, щоб на рівні довільної координати z його структуру утворювали б тільки прямокутники (рис. 2). Границі кожної ділянки (фази) $k = 1, 2, \dots, n$ визначаються геометричними параметрами ($y_{l_k}, y_{n_k}, z_{H_k}, z_{\theta_k}$), а властивості матеріалу – фізико-механічними характеристиками (модулем пружності E_k і зсуву G_k). Загальна кількість фаз дорівнює n .

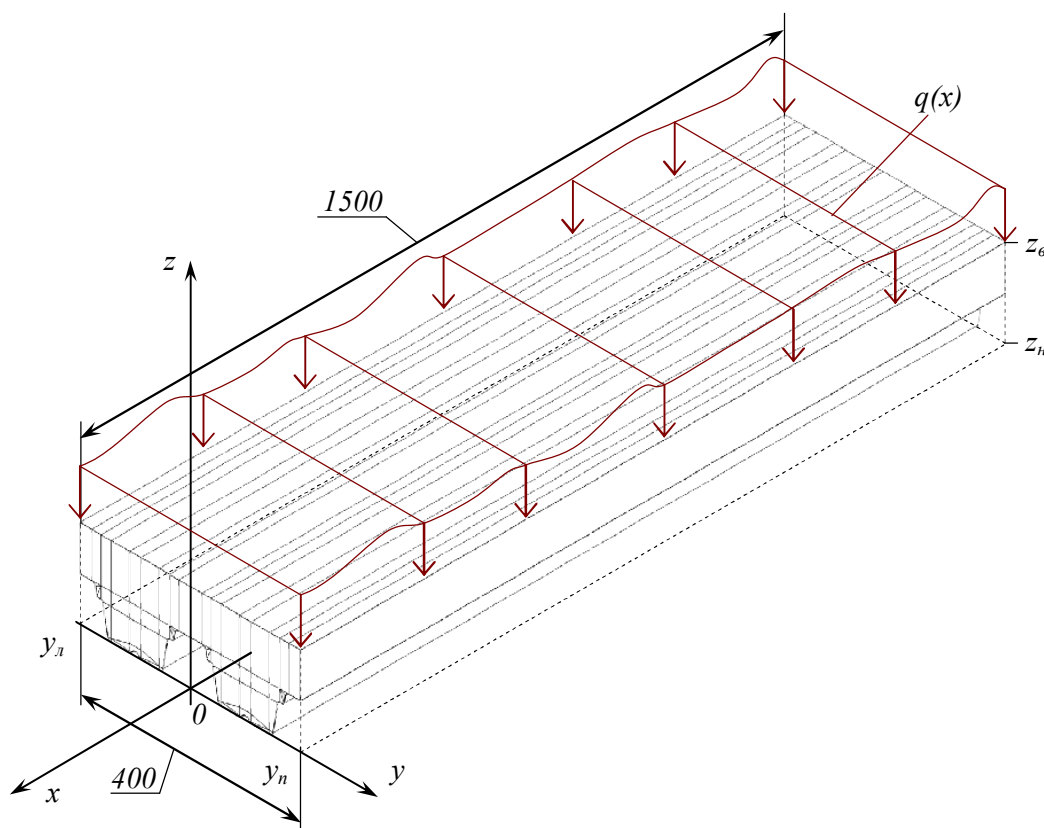


Рис. 1. Конструкція розрахункового зразка легкобетонної плити з профільованим настилом

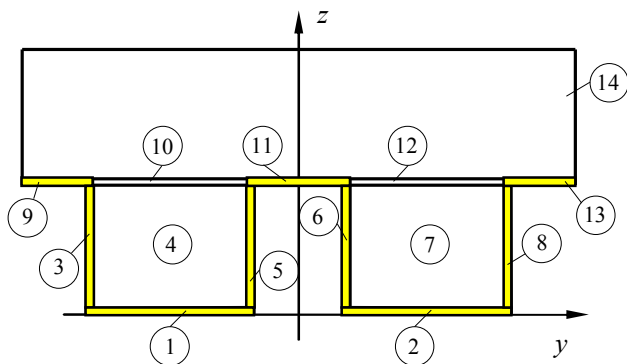


Рис. 2. Апроксимований переріз легкобетонної плити з профільованим настилом

Некласична зсувна модель будується в декілька етапів. На першому етапі відмовляються від гіпотези про суцільність і однорідність матеріалів, але зберігають гіпотезу плоских перерізів. Співвідношення, що описують деформований стан на першому етапі, не відрізняються від співвідношень опору матеріалів. Але, коли розглядається напружений стан, то в ньому виникають зміни, що викликані неоднорідною будовою перерізу. Внаслідок того що перший етап базується на гіпотезі плоских перерізів, а співвідношення, які при цьому описують деформований стан, не відрізняються від співвідношень опору матеріалів, він названий **класичною моделлю НДС**. Удосконалення некласичної моделі почнемо саме з класичної моделі.

Будемо вважати напружено-деформований стан лінійним (гіпотеза плоских перерізів). Вирази для визначення нормальних σ_x і дотичних $\tau_{zx} = \tau_{xz}$

напружень, які є функціями трьох координат x, y, z , набувають вигляду [6, 7]:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} E(y, z) \xi_0(z); \quad (1)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{d^3 w(x)}{dx^3} f_0(z).$$

Вирази (1) за структурою відповідають аналогічним формулам опору матеріалів з тією лише відмінністю, що враховують неоднорідність поперечного перерізу. У цих виразах $E(y, z)$ – функція розподілу модулів пружності по поперечному перерізу; $w(x)$ – прогин плити, що згинається, який можна визначити з відомих умов закріплення балки і навантаження за формулами опору матеріалів.

На відміну від співвідношень, наведених у [2, 6, 7, 8] для $b(z)$, в даному випадку ширина поперечного перерізу буде визначатися з виразу:

$$b(z) = \sum_{m=1}^n b_m \left(\theta(z - z_{n_m}) - \theta(z - z_{e_m}) \right), \quad (2)$$

де b_m – ширина фази, $b_m = y_{n_m} - y_{e_m}$.

Некласична модель. У роботах [2, 6, 7, 8] було розроблено депланаційну ітераційну модель згину композитних плитних елементів. Розглянемо

знаходження коефіцієнтів жорсткості і функцій розподілу напружень за висотою перерізу тільки для першої ітерації (вищі ітерації виконують аналогічно).

Відповідно до [2, 6, 7, 8] нормальні і дотичні напруження визначаються такими

співвідношеннями:

$$\sigma_x(x, y, z) = E(y, z) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \xi_0(z) - \frac{d^2 \chi(x)}{dx^2} \xi_1(z) \right); \quad (3)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{d^3 w(x)}{dx^3} f_0(z) - \frac{d^3 \chi(x)}{dx^3} f_1(z),$$

де $\xi_0(z)$ та $f_0(z)$ – функції, що відповідають виразам класичної моделі, поданої у [12];

$\chi(x)$ – нова шукана функція, пов'язана з урахуванням деформацій зсуву та депланацією перерізу;

$\xi_1(z)$ і $f_1(z)$ – функції розподілу нормальних і дотичних напружень за

висотою перерізу, які також обумовлені урахуванням деформацій зсуву. Зупинимося на їх знаходженні докладніше.

Структура формул $\xi_1(z)$ і $f_1(z)$, як і аналогічних функцій для вищих ітерацій, схожа зі структурою формул $\xi_0(z)$ і $f_0(z)$:

$$\xi_1(z) = \frac{B_1(z_g)}{B(z_g)} - \psi_1(z); \quad (4)$$

$$f_1(z) = \frac{1}{b(z)} \left(B_1(z) - \frac{B_1(z_g)}{B(z_g)} B(z) \right), \quad (5)$$

де функції $\psi_1(z)$ та $B_1(z)$ задаються виразами:

$$\psi_1(z) = \frac{1}{b(z)} \int_{z_n}^z \int_{y_n}^{y_n} \frac{f_0(z)}{G(y, z)} dy dz; \quad (6)$$

$$B_1(z) = \int_{z_n}^z \int_{y_n}^{y_n} E(y, z) \psi_1(z) dy dz. \quad (7)$$

Щоб знайти ці інтеграли, знову скористаємося правилом інтегрування узагальненої функції Хевісайда та перетвореннями, аналогічними до виведення формули за неklasичною моделлю, яка наведена [12]:

$$\psi_1(z) = \frac{1}{b(z)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_i b_j E_j}{G_i} \left(\psi_{1B}(z)_{i,j} - \frac{B_0(z_g)}{B(z_g)} \psi_{1b}(z)_{i,j} \right); \quad (8)$$

$$B_1(z) = \frac{1}{b(z)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{b_i b_j b_k E_i E_k}{G_j} \times \left(B_{1B}(z)_{i,j,k} - \frac{B_0(z_g)}{B(z_g)} B_{1b}(z)_{i,j,k} \right), \quad (9)$$

де функції $\psi_{1B}(z)_{i,j}$, $\psi_{1b}(z)_{i,j}$ і $B_{1B}(z)_{i,j,k}$, $B_{1b}(z)_{i,j,k}$ дорівнюють:

$$\begin{aligned} \psi_{1B}(z)_{i,j} &= \theta(z - z_{H_i}) \left(\theta(z_{H_i} - z_{H_j}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \psi_0(z) dz dz - \theta(z_{H_i} - z_{\Theta_j}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z \psi_0(z) dz dz \right) - \\ &\quad - \theta(z - z_{\Theta_i}) \left(\theta(z_{\Theta_i} - z_{\Theta_j}) \int_{z_{\Theta_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z \psi_0(z) dz dz - \theta(z_{H_i} - z_{\Theta_j}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z \psi_0(z) dz dz \right); \\ \psi_{1b}(z)_{i,j} &= \theta(z - z_{H_i}) \left(\theta(z_{H_i} - z_{H_j}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z dz dz - \theta(z_{H_i} - z_{\Theta_j}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z \psi_0(z) dz dz \right) - \\ &\quad - \theta(z - z_{\Theta_i}) \left(\theta(z_{\Theta_i} - z_{\Theta_j}) \int_{z_{\Theta_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z dz dz - \theta(z_{H_i} - z_{\Theta_j}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z dz dz \right); \\ B_{1B}(z)_{i,j,k} &= \theta(z - z_{H_i}) \left(\theta(z_{H_i} - z_{H_j}) \left[\theta(z_{H_j} - z_{H_k}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{H_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \theta(z_{H_j} - z_{\Theta_k}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{\Theta_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz \right] - \theta(z_{H_i} - z_{\Theta_j}) \left[\theta(z_{\Theta_j} - z_{\Theta_k}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z \int_{z_{\Theta_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \theta(z_{H_j} - z_{\Theta_k}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z \int_{z_{\Theta_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz \right] \right) - \theta(z - z_{\Theta_i}) \times \\ &\quad \times \left(\theta(z_{\Theta_i} - z_{\Theta_j}) \left[\theta(z_{H_j} - z_{H_k}) \int_{z_{\Theta_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{H_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz - \theta(z_{H_j} - z_{\Theta_k}) \int_{z_{\Theta_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{\Theta_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz \right] - \right. \\ &\quad \left. - \theta(z_{H_j} - z_{\Theta_k}) \int_{z_{\Theta_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{\Theta_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz \right] - \theta(z_{H_i} - z_{\Theta_j}) \left[\theta(z_{\Theta_j} - z_{\Theta_k}) \int_{z_{\Theta_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z \int_{z_{\Theta_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz - \right. \\ &\quad \left. - \theta(z_{H_j} - z_{\Theta_k}) \int_{z_{\Theta_i}}^z \int_{z_{\Theta_j}}^z \int_{z_{\Theta_k}}^z \psi_0(z) dz dz dz \right] \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{Ib}(z)_{i,j,k} = & \theta(z - z_{H_i}) \times \left(\theta(z_{H_i} - z_{H_j}) \left[\theta(z_{H_j} - z_{H_k}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{H_k}}^z dzdzdz - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \theta(z_{H_j} - z_{\epsilon_k}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{\epsilon_k}}^z dzdzdz \right] - \theta(z_{H_i} - z_{\epsilon_j}) \left[\theta(z_{\epsilon_j} - z_{\epsilon_k}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{\epsilon_j}}^z \int_{z_{\epsilon_k}}^z dzdzdz - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \theta(z_{H_j} - z_{\epsilon_k}) \int_{z_{H_i}}^z \int_{z_{\epsilon_j}}^z \int_{z_{\epsilon_k}}^z dzdzdz \right] \right) - \theta(z - z_{\epsilon_i}) \times \\
 & \times \left(\theta(z_{\epsilon_i} - z_{\epsilon_j}) \left[\theta(z_{H_j} - z_{H_k}) \int_{z_{\epsilon_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{H_k}}^z dzdzdz - \theta(z_{H_j} - z_{\epsilon_k}) \int_{z_{\epsilon_i}}^z \int_{z_{H_j}}^z \int_{z_{\epsilon_k}}^z dzdzdz \right] - \right. \\
 & \left. - \theta(z_{H_i} - z_{\epsilon_j}) \left[\theta(z_{\epsilon_j} - z_{\epsilon_k}) \int_{z_{\epsilon_i}}^z \int_{z_{\epsilon_j}}^z \int_{z_{\epsilon_k}}^z dzdzdz - \theta(z_{H_j} - z_{\epsilon_k}) \int_{z_{\epsilon_i}}^z \int_{z_{\epsilon_j}}^z \int_{z_{\epsilon_k}}^z dzdzdz \right] \right);
 \end{aligned}$$

Аналогічні процедури можуть бути побудовані для будь-якої ітерації.

Для знаходження ФМХПП D_{12} і D_{22} [2, 6, 7, 8] використовується формула (8), а самі D_{12} та D_{22} знаходяться чисельно.

Обчислення функцій розподілу напружень за висотою перерізу, характеристик жорсткості та параметрів НДС виконувалося за допомогою програмного комплексу Mathcad. Розглядався зразок, поданий на рис. 1 і 2 з такими характеристиками: до плити прикладалося рівномірно розподілене навантаження амплітудою $q = 8444$ Н/м, довжина прольоту плити 1,4 м, матеріал включень 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13 – оцинкована сталь з модулем пружності $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа і модулем зсуву $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; матеріал включень 4, 7, 10, 12, 14 – полістиролбетон з модулем пружності $E = 480$ МПа і модулем зсуву $G = 218$ МПа. У результаті розрахунку були отримані такі значення коефіцієнтів жорсткості для плити (рис. 1):

$$D_{00} = -1,429685057574169 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}^2;$$

$$D_{01} = 5,816237083351402 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}^4;$$

$$D_{11} = -1,924595852722144 \cdot 10^2 \text{ Н}\cdot\text{м}^6.$$

У підсумку оброблення результатів розрахунку було отримано широкий спектр графічних та аналітичних даних (напружень, прогинів). Наведемо деякі з них. На рис. 3 показано тривимірну діаграму розподілу дотичних напружень по поперечному перерізу плити на лівій опорі ($x = 0$ м) за неklasичною моделлю. Для побудови діаграми переріз розбивався на розрахункові точки по осях z та y . На кожен вісь приймалося по 100 розрахункових точок. Загальна кількість розрахункових точок – 10000. Діаграма дає змогу наочно уявити розподіл напружень по усьому перерізу, у тому числі і стрибки напружень у зонах переходу до меншої ширини поперечного перерізу. Нульові ділянки на діаграмі відповідають порожнинам у перерізі (відсутній матеріал). У зонах переходу матеріалів відсутні стрибки напружень, що відповідає фізичній суті дотичних напружень.

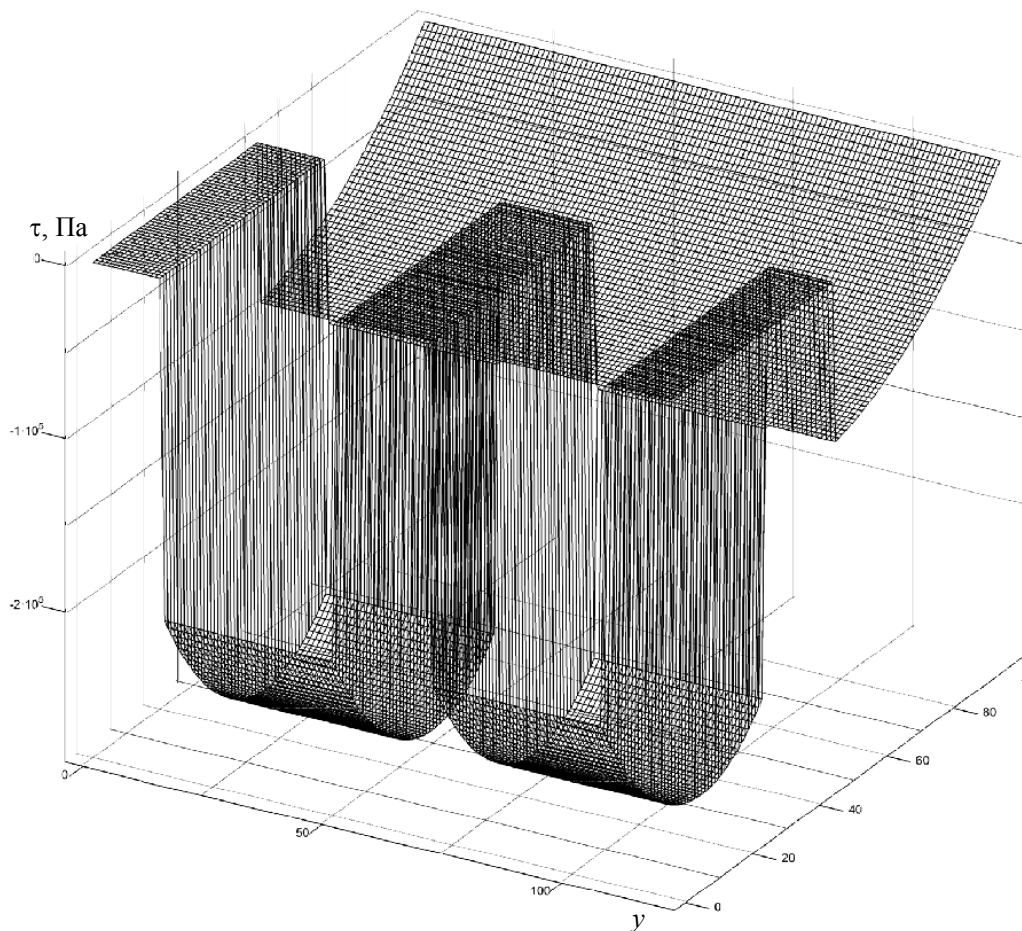


Рис. 3. Тривимірний графік розподілу дотичних напружень по поперечному перерізу плити на лівій опорі (верхня частина перерізу віддалена від нас)

На рис. 4 зображено тривимірну діаграму розподілу нормальних напружень по поперечному перерізу плити посередині її прольоту ($x = 0,7$ м), що обчислені за неklasичною моделлю. Для наочності сприйняття діаграму розвернуто верхньою частиною перерізу до глядача. Кількість розрахункових точок така сама, як і для діаграми дотичних напружень. Діаграма наочно демонструє, що нормальні напруження змінюються по двох координатах перерізу, на відміну від дотичних напружень. Найбільші напруження виникають у профільованому настилі по краях перерізу. У той самий час напруження у полістиролбетоні значно менші за напруження у профнастилі і у

масштабі діаграми практично не відрізняються від нуля.

Як видно з наведених діаграм, за доопрацьованою моделлю можна отримати параметри напружено-деформованого стану легкобетонної комбінованої плити в числовому або графічному вигляді для будь-якої точки будь-якого перерізу плити та порівняти з допустимими величинами для кожного матеріалу, з яких складається конструкція.

Висновки з дослідження і перспективи, подальший розвиток у даному напрямку. Запропоновані авторами удосконалені методи дають змогу визначити параметри напружено-деформованого стану легкобетонних

комбінованих плит з комбінованим настилом у будь-якій точці конструкції через залежності неklasичної зсувної моделі. Запропонована в роботі модель дає змогу автоматично описати структуру поперечного перерізу та реалізувати процедури розрахунку неоднорідних

комбінованих плитних елементів із практично необмеженою кількістю фаз. Як видно з поданих формул, їх структура не залежить від кількості включень. Від кількості включень залежить лише час розрахунку, який від ітерації до ітерації зростає в геометричній прогресії.

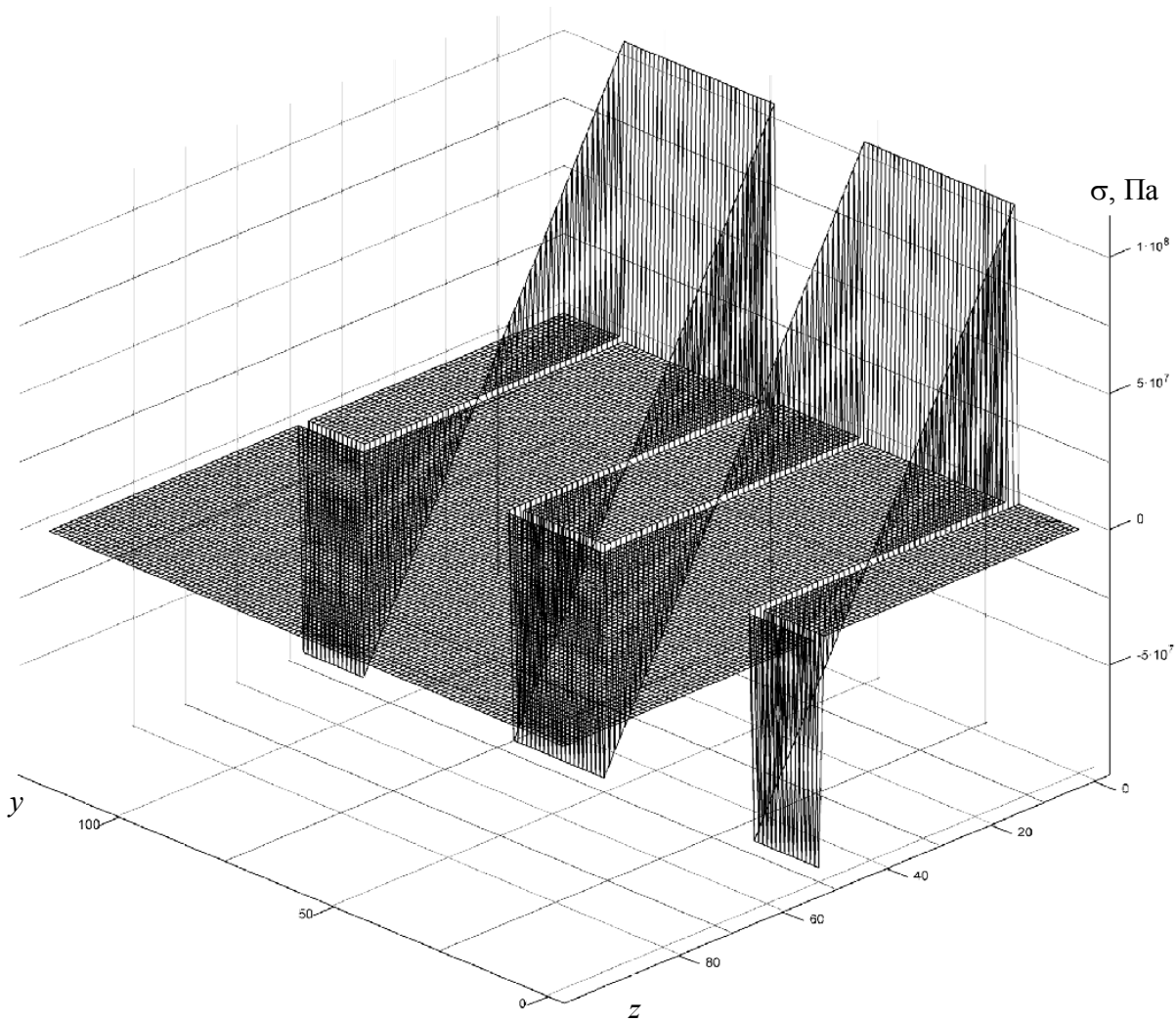


Рис. 4. Тривимірна діаграма розподілу нормальних напружень по поперечному перерізу плити посередині прольоту (верхня частина перерізу наближена до нас)

Використання запропонованої в роботі моделі є особливо актуальним для коректного розрахунку параметрів напружено-деформованого стану комбінованих плит при проектуванні конструктивних елементів, які поєднують у собі матеріали, фізико-механічні

характеристики яких суттєво (на декілька порядків) відрізняються (наприклад, при використанні як матеріалу плити надлегких – теплоізоляційних бетонів, у тому числі пінополістиролбетонів з низьким модулем пружності).

Список використаних джерел

1. Амбарцумян, С. А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек [Текст] / С.А. Амбарцумян // Изв. АН Арм. ССР: сер. физ.- мат. наук. – 1964. – Т. 17, № 3. – С. 29-53.
2. Горик, О. В. Дослідження неklasичної ітераційної моделі деформування композитних брусів [Текст] / О. В. Горик // Машинознавство. – 2000. – №2. – С.18-24.
3. Григолюк, Э. И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники [Текст] / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов – М. : Наука, 1972. – Т.5. – 271 с.
4. Carrera E. Developments, ideas and evaluations based upon Reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells. ASME Appl Mech Rev 2001;54(4):301–29. DOI: 10.1115/1.1385512.
5. Khdeir A, Reddy J, Librescu L. Analytical solution of a refined shear deformation theory for rectangular composite plates. Int J Solids Struct 1986;23(10):1447–63. DOI: 10.1016/0020-7683(87)90009-6.
6. Piskunov V.G., Goryk A.V., and Cherednikov V.N. Modeling of transverse shears of piecewise homogeneous composite bars using an iterative process with account of tangential loads. 2. Resolving equations and results. Mechanics of Composite Materials 2000;36;Iss.6: 445-452. DOI: 10.1023/A:1006798314569.
7. Piskunov V.G., Goryk A.V., and Cherednikov V.N. Modeling of transverse shears of piecewise homogeneous composite bars using an iterative process with account of tangential loads. 1. Construction of model. Mechanics of Composite Materials 2000; 36; Iss.4: 287-296. DOI: 10.1007/BF02262807.
8. Piskunov V.G., Goryk A.V., Lyakhov A.L., Cherednikov V.N. High-order model of the stress–strain state of composite bars and its implementation by computer algebra. Compos Struct 2000;48:169–176 DOI: 10.1016/S0263-8223(99)00091-4.
9. Reddy J. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. Int J Solids Struct 1983;20(9):881–96. DOI: 10.1016/0020-7683(84)90056-8.
10. Reissner E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. Int J Solids Struct 1975;11:569–73. DOI: 10.1016/0020-7683(75)90030-X.
11. Timoshenko, S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Philosophical Magazine and Journal of science. – 1921. – Vol.41, ser.6, №245. – P. 744 – 746.
12. Cherednikov V. M., Voskobiinyk O. P., Cherednikova O. V. «Evaluation of the Warping Model for Analysis of Polystyrene Concrete Slabs with Profiled Steel Sheeting.» Periodica Polytechnica Civil Engineering 2017; 61(3), pp. 483–490, 2017. <https://doi.org/10.3311/PPci.8717>.
13. Designers' Guide to Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures : 2th editions / Roger P. Johnson. – 2011. – 310 p.
14. Лещенко, М. В. Теплотехнические свойства стеновых ограждающих конструкций из стальных тонкостенных профилей и полистиролбетона [Текст] / М. В. Лещенко, В. А. Семко // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – №8 (60). – С. 44-55. (doi: 10.5862/MCE.60.6).

15. Semko V. Effect of Bracing Systems on Overall Stability and Deformability of Cold-Formed Steel Roofing Structures / V. Semko, D. Prohorenko // Design, Fabrication and Economy of Metal Structures: International Conference Proceedings 2013, Miskolc, Hungary, April 24 – 26, 2013. – Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2013. – P. 229-234.

Воскобійник Олена Павлівна, д-р техн. наук, професор кафедри організації і технології будівництва та охорони праці Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка. Тел.: (050) 304-40-23. E-mail: elenvosko@gmail.com.

Череднікова Олександра Володимирівна, аспірант кафедри архітектури та міського будівництва Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка. Тел.: (095) 546-80-41. E-mail: al.chered108@gmail.com.

Voskobiinyk Olena Pavlivna, Dr. Sc. Science of building constructions, Department of organization and technology of building and health safety Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University. Tel.: (050) 304-40-23.

E-mail: elenvosko@gmail.com.

Cherednikova Oleksandra Volodymyrivna, Architecture and Urban Construction Department Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University. Tel.: (095) 546-80-41. E-mail: al.chered108@gmail.com.

Стаття прийнята 26.06.2017 р.