УДК 621.333.41

ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРИ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ РАЦІОНАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ РЕСУРСІВ У ЗАЛІЗНИЧНІЙ СФЕРІ ДІЯЛЬНОСТІ

Канд. техн. наук В. П. Нерубацький, магістрант Д. А. Гордієнко

ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ РАЦИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ В ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ СФЕРЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Канд. техн. наук В. П. Нерубацкий, магистрант Д. А. Гордиенко

APPLICATION OF THE CLASSIC MODEL OF THE LOTKA–WOLTERRA AT THE REDUCTION OF THE PROBLEM OF RATIONAL USE OF RESOURCES IN RAILWAY SCOPE OF ACTIVITY

PhD, sen. lecturer V. P. Nerubatskyi, master D. A. Hordiienko

DOI: https://doi.org/10.18664/1994-7852. 178.2018.138917

У статті розглянуто моделювання процесів, які описуються рівняннями Лотки–Вольтерри, за допомогою програмного продукту Matlab. Наведено результати моделювання системи, аналіз яких виконано за допомогою часових функцій та фазових траєкторій. Одержано залежності, які дають змогу спрогнозувати кількість гальмівних колодок, необхідних для забезпечення рухомого складу, і тим самим оптимізувати витрати в залізничній сфері діяльності.

Ключові слова: *модель, система, рівняння Лотки–Вольтерри, залежності, часові характеристики, фазовий портрет, оптимізація, ресурсозбереження, рухомий склад, колодки.*

В статье рассмотрено моделирование процессов, которые описываются уравнениями Лотки–Вольтерры, с помощью программного продукта Matlab. Приведены результаты моделирования системы, анализ которых выполнен с помощью временных функций и фазовых траекторий. Получены зависимости, позволяющие спрогнозировать количество тормозных колодок, необходимых для обеспечения подвижного состава, и тем самым оптимизировать расходы в железнодорожной сфере деятельности.

Ключевые слова: *модель, система, уравнения Лотки–Вольтерры, зависимости, временные характеристики, фазовый портрет, оптимизация, ресурсосбережение, подвижной состав, колодки.*

The article deals with the simulation of processes described by the Lotka-Volterra equations, which allows a comprehensive assessment of the dynamics of processes in various fields (biology, ecology, medicine, economics, social studies, history, radio physics and other sciences), to reach the equilibrium levels of the competing systems studied, theoretically predict and control the behavior of the main parameters of the model.

Among the most important issues facing today's modern railway enterprises in Ukraine is the search for ways to increase their efficiency. Under these conditions, issues of development and implementation of resource-saving technologies at railway enterprises are of particular importance.

For efficiency enterprises, cost optimization models are needed to ensure that economically sound decisions are made that increase financial performance and form the basis for effective work.

The article deals with the simulation of processes described by the Lotka-Volterra equations with the help of the Matlab software is considered. Based on the results presented in the simulation of the analyzed system, with the help of time and phase trajectories, it was investigated that Lotka-Volterra's mathematical model is a universal model that can be used to optimize a particular process.

The application of the classical mathematical model of Lotka-Volterra in the railway field of activity for cost optimization is carried out on the example of the process of distributing the estimated amount of brake pads needed to provide rolling stock, by creating an imitation model and obtaining characteristics that allow obtaining clear data on the process of distributing brake pads by locomotives and at the same time to avoid downtime, as well as excessive costs for the purchase of too many brake pads.

Keywords: *model, system, Lotka - Volterra equations, dependencies, time characteristics, phase portrait, optimization, resource saving, rolling stock, pads.*

Вступ. Серед найбільш важливих проблем, що стоять сьогодні перед сучасними підприємствами залізничного транспорту України, є пошук шляхів підвищення ефективності їх діяльності. За цих умов особливого значення набувають питання розроблення та впровадження на підприємствах залізничного транспорту ресурсозберігаючих технологій [1].

Для ефективної діяльності підприємств необхідні моделі оптимізації витрат [2], щоб забезпечити прийняття економічно обґрунтованих рішень, які підвищують фінансову результативність і формують основу ефективної роботи [9].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останніми десятиліттями для імітаційного моделювання широко використовується модель Лотки–Вольтерри, яка дає змогу комплексно оцінити динаміку процесів у різних галузях (біології, екології, медицині, економіці, в соціальних дослідженнях, в історії, в радіофізиці та інших науках), вийти на рівноважні рівні досліджуваних конкуруючих систем, теоретично

спрогнозувати та керувати поведінкою основних параметрів моделі. Зважаючи на складність і нелінійність таких моделей, можуть бути використані різні сучасні комп'ютерні пакети.

Модель Лотки–Вольтерри було запропоновано в 1925–1927 рр. американським математиком, фізико-хіміком, статистом Альфредом Джеймсом Лоткою, який народився 1880 р. у м. Львів, та італійським математиком, фізиком Віто Вольтеррою [3]. Ця модель набула величезної популярності і іноді називається класичною моделлю взаємодії популяцій хижака та жертви.

У переважній більшості випадків даний клас динамічних моделей застосовується до ринку праці, в тому числі з урахуванням наявних на ньому потенційних працівників і вакантних робочих місць. У галузі економіки ця модель досить добре описує взаємодію двох конкуруючих підприємств, галузей, регіонів. Більш складним прикладом економічної взаємодії є система світового ринку. Замість підприємств можна розглядати держави. Суперництво може вестися, наприклад, за лідерство в економічній сфері, боротьбі за територію, рівень життя. Але, крім «мирної» конкуренції, існує і військова конкуренція, як, наприклад, гонка озброєнь [6].

Визначення мети та завдання дослідження. Метою роботи є дослідження класичної математичної моделі Лотки–Вольтерри із застосуванням програмного продукту Matlab. Завдання дослідження полягають у застосуванні класичної математичної моделі Лотки–Вольтерри в залізничній сфері діяльності для оптимізації витрат на прикладі процесу розподілення розрахункової кількості гальмівних колодок, необхідних для забезпечення рухомого складу, шляхом створення імітаційної моделі та отримання характеристик, що дають змогу отримати чіткі дані про процес розподілення гальмівних колодок по локомотивах.

Основна частина дослідження. Іноді проста математична модель добре описує складну біологічну, екологічну або економічну систему. Прикладом цього служать довготривалі відносини між видами хижака та жертви в будь-якій екосистемі.

У роботі [4] проведено математичні розрахунки зростання популяцій окремо взятого виду хижака (лисиця) та жертви (заєць). Дві популяції описуються класичними рівняннями Лотки–Вольтерри:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y, \quad x(0); \\ \dfrac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y. \quad y(0). \end{cases} \tag{1}$$

де x – чисельність популяції «жертв»;

y – чисельність популяції «хижаків»;

a – коефіцієнт природного приросту популяції «жертв», «народжуваність», або швидкість зростання чисельності травоїдних за відсутності хижаків;

b – коефіцієнт впливу популяції «хижаків» на чисельність популяції «жертв», («поїдання»), або швидкість, з якою зустрічі хижаків з жертвами видаляють травоїдних з популяції;

c – коефіцієнт природної смертності популяції «хижаків», або швидкість скорочення чисельності м'ясоїдних під час відсутності травоїдних;

d – коефіцієнт засвоєння біомаси «жертв» популяцією «хижаків», або швидкість, з якою зустрічі хижаків з жертвами дозволяють хижакам додавати чисельність своєї популяції;

$x(0)$ – початкова кількість «жертв»;

$y(0)$ – початкова кількість «хижаків»;

t – поточний час.

Отримані розрахунки в роботі [4] після комп'ютерного моделювання системи «хижак – жертва» засобами MATLAB/Simulink при деяких конкретних значеннях параметрів і початкових умовах показують, що межі щільності популяції

можна описати простими рівняннями, розв'язання яких дає характерну криву чисельності популяції, яка зростає експоненціально, поки вона невелика, а потім вирівнюється, коли досягає меж можливості екосистеми підтримувати її. Просте продовження цієї концепції дає змогу зрозуміти екосистему, в якій взаємодіють два види – хижак і жертва [5].

На прикладі такої моделі системи «хижак – жертва» проведено розрахунок кількості гальмівних колодок, необхідних для забезпечення рухомого складу.

Для розрахункових значень, необхідних для моделювання системи «колодки – локомотиви», було зроблено такі допущення [2]:

x – кількість гальмівних колодок;

y – кількість локомотивів, обладнаних колодками;

a – коефіцієнт постачання гальмівних колодок у депо, приймаємо $a = 4$;

b – коефіцієнт використання колодок на локомотивах, приймаємо $b = 3$;

c – коефіцієнт виходу з ладу локомотивів (старіння, недієздатність, неможливість відновлення після аварії), або швидкість скорочення чисельності локомотивів під час відсутності гальмівних колодок, приймаємо $c = 1$;

d – коефіцієнт задіяння локомотивів, обладнаних гальмівними колодками, приймаємо $d = 0{,}5$;

$x(0)$ – початкова кількість сотень гальмівних колодок, приймаємо $x(0) = 5$;

$y(0)$ – початкова кількість десятків локомотивів, приймаємо $y(0) = 2$;

t – час, протягом якого проводиться дослідження, приймаємо $t = 1$ рік, тобто 12 місяців.

Імітаційна модель системи «колодки – локомотиви» побудована за системою рівнянь (1) у програмному пакеті MATLAB [7] (рис. 1).

Часові функції [8] системи «колодки – локомотиви» отримані за період 12 місяців (рис. 2).

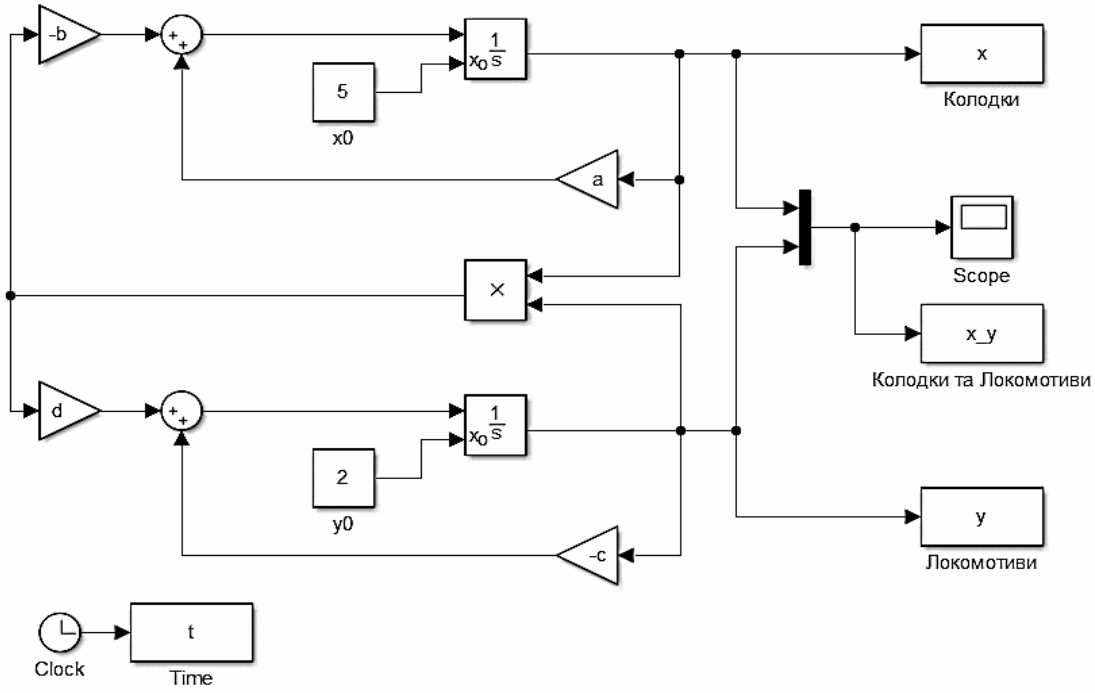

Рис. 1. Імітаційна модель системи «колодки – локомотиви»

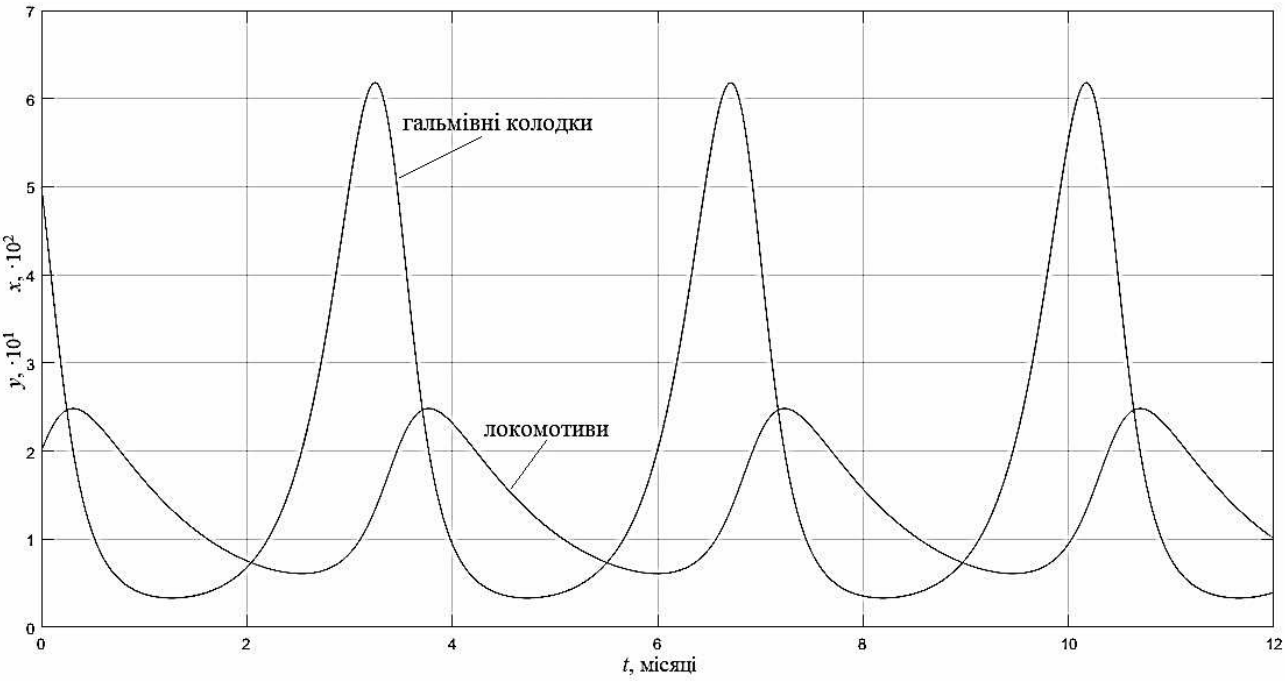

Рис. 2. Часові функції системи «колодки – локомотиви»

З часових характеристик спостерігаємо, що за перший місяць відбувається облаштування гальмівними колодками локомотивів. У цей час поступово зменшується кількість локомотивів, що потребують заміни колодок. Протягом наступних двох місяців необхідно зробити поповнення колодок приблизно до 600 штук, щоб забезпечити ними несправні локомотиви, кількість яких на третьому місяці починає різко зростати. Таким чином, два цикли повторюються протягом трьох місяців, тобто це період поповнення колодок і період, протягом якого відбувається заміна колодок на локомотивах.

Фазовий портрет системи «колодки – локомотиви» (рис. 3), являє собою концентрично замкнуту криву, за якою спостерігається залежність – при змінній кількості локомотивів, що потребують облаштування, змінюється необхідна кількість гальмівних колодок.

Дана модель є універсальною – за нею можна спрогнозувати кількість гальмівних колодок, необхідну для забезпечення наявних у депо локомотивів.

Додамо у схему блок Step, який позначимо -5*y*, що означає зменшення кількості локомотивів на 5, наприклад, через чотири місяці, у зв'язку зі старінням, непридатністю, виходом з ладу або з інших причин. Другий блок Step позначимо +10*y*, тобто збільшення кількості локомотивів на 10, наприклад, через сім місяців (це може бути придбання нових або капітальний ремонт застарілих локомотивів) (рис. 4).

З імітаційної моделі отримуємо часові характеристики (рис. 5).

З характеристик спостерігаємо, як змінюється кількість гальмівних колодок, необхідних для облаштування, при зміні кількості локомотивів: через 4 місяці, коли зменшується кількість локомотивів на 5, потреба в колодках зменшується з 610 до 450; на сьомому місяці збільшується кількість локомотивів на 10, при цьому необхідно збільшити кількість колодок до 860.

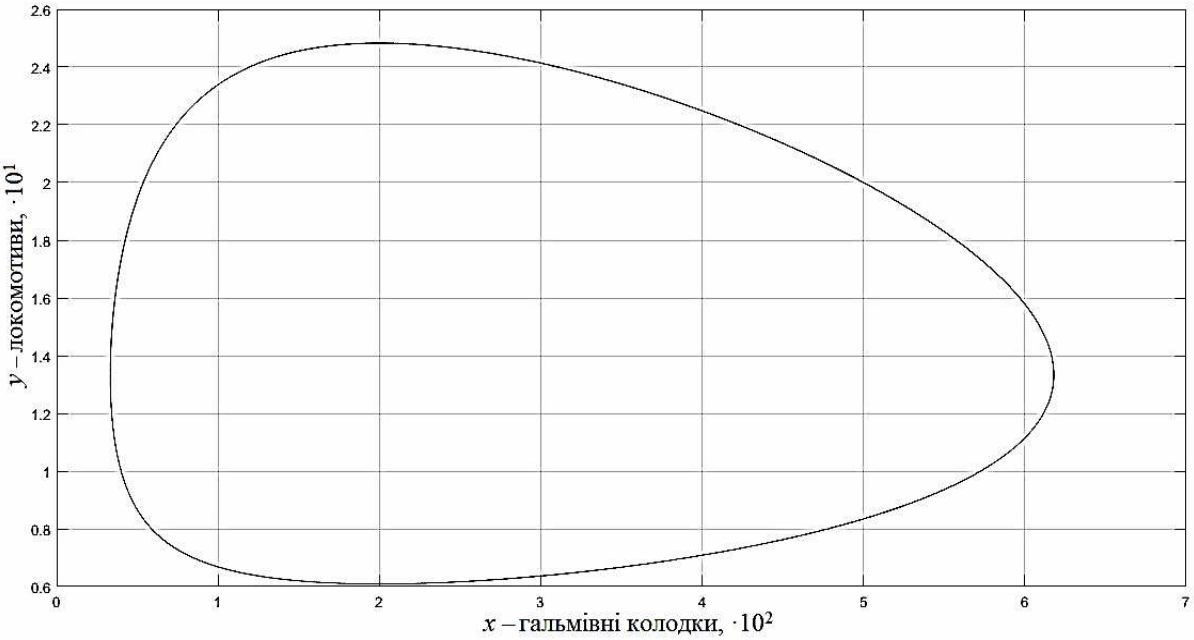

Рис. 3. Фазовий портрет системи «колодки – локомотиви»

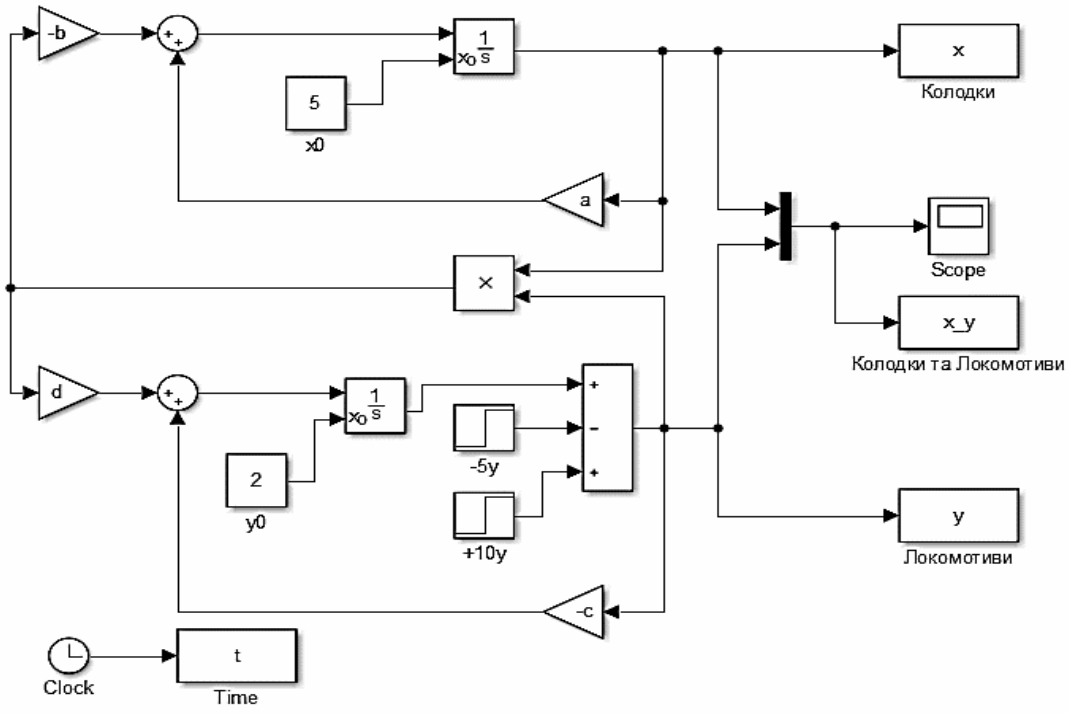

Рис. 4. Імітаційна модель системи «колодки – локомотиви»
зі зміною кількості локомотивів упродовж року

Для відображення динаміки зміни кількості гальмівних колодок та зміни локомотивів було отримано фазовий портрет системи «колодки – локомотиви» (рис. 6) та фазову траєкторію у тривимірному просторі (рис. 7).

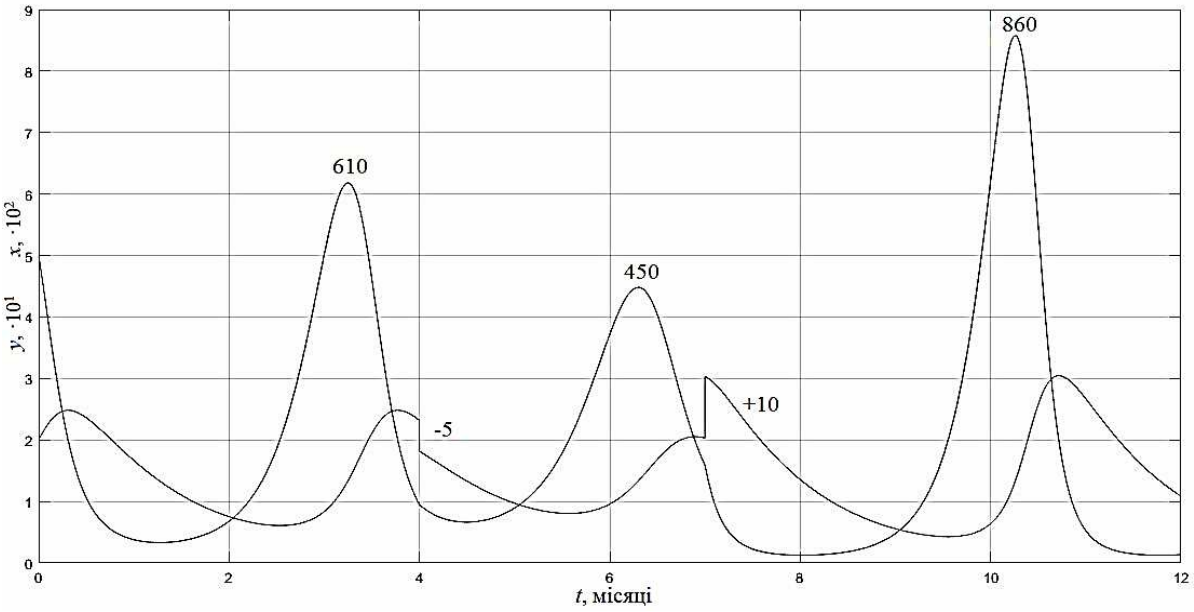

Рис. 5. Часові функції системи «колодки – локомотиви»
зі зміною кількості локомотивів впродовж року

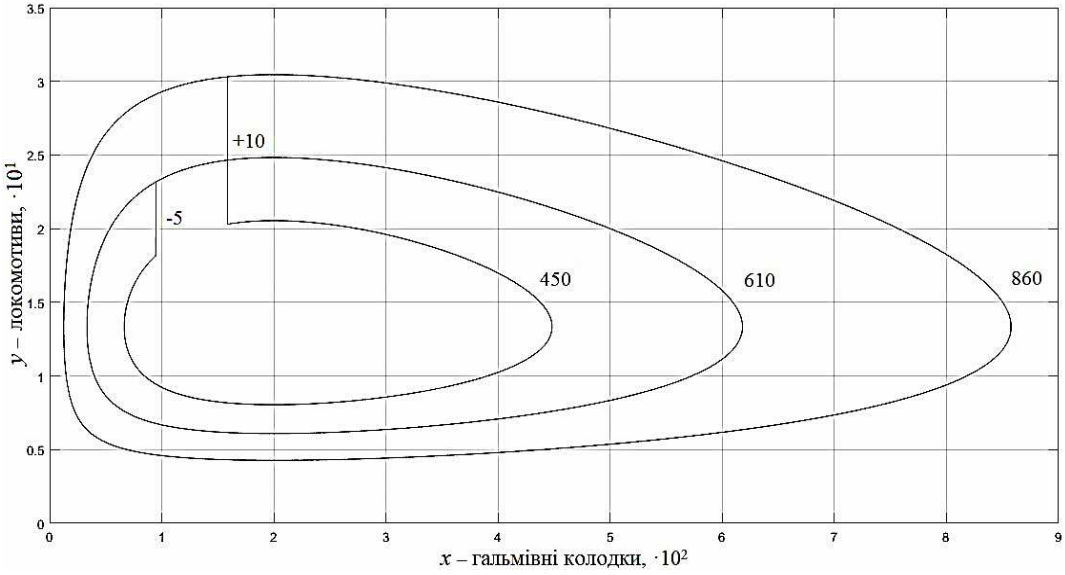

Рис. 6. Фазовий портрет системи «колодки – локомотиви»

Висновки. Таким чином, математична модель Лотки–Вольтерри являє собою універсальну модель, яку можна використовувати для оптимізації певного процесу, прикладом якого може бути розподілення гальмівних колодок по локомотивах, що і було досліджено в роботі.

З поданих характеристик системи «колодки – локомотиви» можна отримати чіткі дані про процес розподілення гальмівних колодок по локомотивах, спрогнозувати їх необхідну кількість з метою забезпечення ними рухомого складу і при цьому уникнути простоїв, а також зайвих витрат на придбання занадто великої кількості гальмівних колодок.

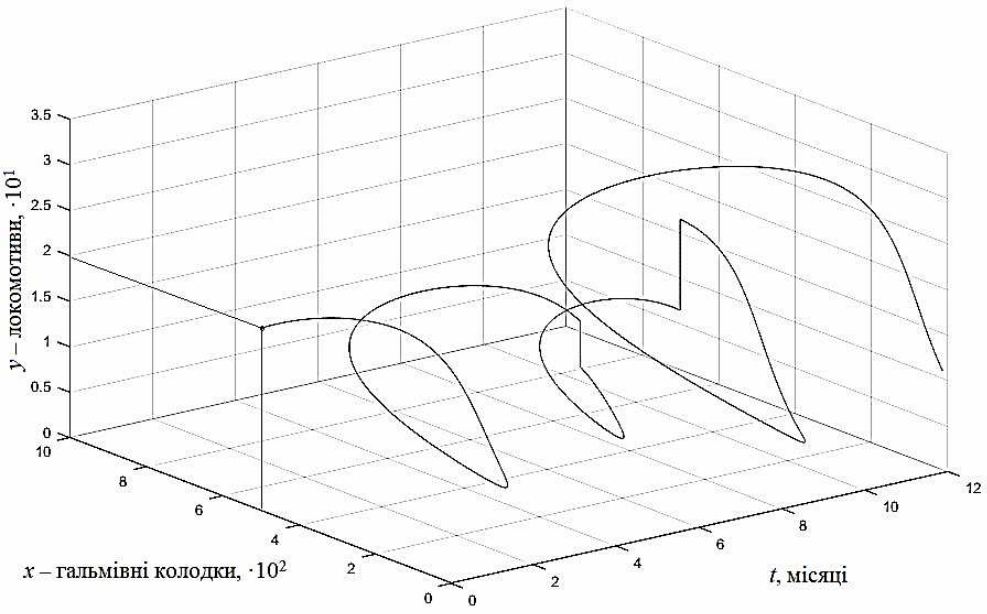

Рис. 7. Фазова траєкторія у тривимірному просторі

Список використаних джерел

1. Гудков, А. В. Ресурсосберегающие технологии и технические средства [Текст] / А. В. Гудков // Железнодорожный транспорт. – 2008. – № 4. – С. 72-78.

2. Губкевич, Т. В. Управление затратами в условиях ресурсосберегающих технологий [Текст] / Т. В. Губкевич // Железнодорожный транспорт. – 2000. – № 12. – С. 73-75.

3. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] – М. : Наука, 1976. – 615 с.

4. Компьютерные технологии в задачах природы и общества [Текст] / Ю. Н. Соколов, Ю. А. Соколов, В. М. Илюшко // Комп'ютерні системи та інформаційні технології : зб. наук. праць. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т «Хар. авіац. ін-т», 2010. – С. 55-64.

5. Соколов, Ю. Н. Компьютерный анализ и проектирование систем управления. Ч. 1. Непрерывные системы [Текст] : учеб. пособие / Ю. Н. Соколов. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2005. – 260 с.

6. Трубецков, Д. И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней [Текст] / Д. И. Трубецков // Изв. вузов «ПНД». – Саратов, 2011. – № 2. – С. 69-88.

7. Щербаков, В. С. Основы моделирования систем автоматического регулирования и электромеханических систем в среде Matlab и Simulink [Текст] / В. С. Щербаков, А. А. Руппель, В. А. Глушец. – Омск, 2003. – 160 с.

8. Athanasopoulos, G., Hyndman, R. J., Kourentzes, N., Petropoulos, F. Forecasting with temporal hierarchies [Text] // European Journal of Operational Research. – 2017. – Volume 262, Issue 1. – P. 60-74.

9. Charnes, A., Cooper, W., Rhodes, E. Measuring the Efficiency of Decision Making Units [Text] // European Journal of Operational Research. – 1978. – № 2. – P. 429-444.

Нерубацький Володимир Павлович, канд. техн. наук, старш. викладач кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Українського державного університету залізничного транспорту.
Тел.: (057) 730-10-76. E-mail: NVP9@i.ua.

Гордієнко Денис Анатолійович, магістрант кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: (057) 730-10-76. E-mail: denis_gordienko@i.ua.

Нерубацкий Владимир Павлович, канд. техн. наук, старш. преподаватель кафедры электроэнергетики, электротехники и электромеханики Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Тел.: (057) 730-10-76. E-mail: NVP9@i.ua.
Гордиенко Денис Анатольевич, магистрант кафедры электроэнергетики, электротехники и электромеханики Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Тел.: (057) 730-10-76.
E-mail: denis_gordienko@i.ua.

Nerubatskyi Volodymyr Pavlovych, PhD, senior lecturer of the department of electric power engineering, electrical engineering and electromechanics of the Ukrainian State University of Railway Transport. Phone: (057) 730-10-76.
E-mail: NVP9@i.ua.
Hordiienko Denys Anatolievych, master of the department of electric power engineering, electrical engineering and electromechanics of the Ukrainian State University of Railway Transport. Phone: (057) 730-10-76.
E-mail: denis_gordienko@i.ua.

Статтю прийнято 23.05.2018 р.