

УДК 621.874+621.86.01

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГОЛОВНИХ БАЛОК МОСТОВИХ КРАНІВ ІЗ ПОПЕРЕДНЬОЮ НАПРУГОЮ

Кандидати техн. наук А. В. Ткачов, О. А. Ткачов, С. В. Мироненко

MATHEMATICAL MODEL OF HEAD BEAMS OF BRIDGE CRANES WITH PRESTRESS

PhD. (Tech.) A. V. Tkachev, PhD. (Tech.) O. A. Tkachev,
PhD. (Tech.) S. V. Myronenko

DOI: <https://doi.org/10.18664/1994-7852.210.2024.320889>



Анотація. У статті розглянуто питання, пов'язані з напружено-деформованим станом попередньо напруженого кранового моста. Мета роботи полягає в розробленні нової математичної моделі головної балки кранів мостового типу, яка дає можливість дослідити її напружено-деформовану поведінку за сумісної дії на балку вертикального рухомого навантаження, статичного навантаження від ваги самої балки та осьового ексцентричного навантаження.

Наведена нова математична модель базована на загальній теорії стійкості пружних систем, за розроблення якої були враховані реальні умови конструктивного виконання кранового моста. Отримані рівняння кривої прогинів цієї балки дали змогу провести дослідження та проаналізувати головні критерії працездатності вантажопідйомних машин – статичну жорсткість і статичну міцність – залежно від співвідношення повздовжніх і поперечних сил, що діють на балку.

Отримані у статті результати можна в подальшому використати для проектування та модернізації кранів із метою підвищення їхньої вантажопідйомності, збільшення терміну їхньої служби без демонтажу, а також для вдосконалення чинних інженерних методів розрахунку як на стадіях проектування, так і в умовах реальної експлуатації.

Ключові слова: критерії працездатності, несуча здатність, попереднє напруження, крановий міст, статична жорсткість, динамічна жорсткість, деформаційний стан.

Abstract. This paper examines issues related to the stress-strain state of a prestressed crane bridge. The purpose of the work is to develop a new mathematical model of the main girder of bridge-type cranes, which allows for investigating its stress-strain behavior under the simultaneous action of a vertical moving load, a static load from the weight of the girder itself, and an axial eccentric load. The main challenge lies in accurately accounting for these different forces, which act on the structure in complex ways, especially when considering the variable nature of the loads involved in crane operations.

The presented new mathematical model is based on the general theory of stability of elastic systems, during the development of which the real conditions of the crane bridge construction were taken into account. In particular, the model reflects the effects of prestressing, which significantly influences the behavior of the bridge under load, as well as the geometric and material properties of the girder. The model also accounts for various factors, including the distribution of forces along the length of the girder, the effects of eccentric loading, and the impact of moving loads, which can cause dynamic responses that complicate the analysis.

The obtained equations of the deflection curve of this beam made it possible to conduct research and analyze one of the main performance criteria of lifting machines – static stiffness and static strength, depending on the ratio of longitudinal and transverse forces acting on the beam. By studying these parameters, it is possible to determine how the crane's structure will respond to different loading scenarios, ensuring that the crane can perform its intended functions safely and efficiently.

The results obtained in this work can be used in the future in the design and modernization of cranes to increase their load capacity, extend their service life without dismantling, and improve the existing engineering calculation methods at both the design stage and in real operation conditions. This research also opens the door to developing more advanced models for even greater accuracy in crane design.

Keywords: *performance criteria, bearing capacity, prestressing, crane bridge, static stiffness, dynamic stiffness, deformation state.*

Вступ. Удосконалення та активний розвиток сучасного виробництва потребує негайного застосування і впровадження новітніх наукових розробок та інженерних рішень. У зв'язку з цим розглянуто актуальні для машинобудівної галузі питання, пов'язані з підвищенням міцності та надійності рухомих і стаціонарних прогонових будов. Одним із таких напрямів для позитивного вирішення зазначених завдань є застосування прогонових конструкцій із попередньою напругою [1], у яких до початку [2] або під час експлуатації [3] штучно створюють внутрішні зусилля, протилежні за знаком робочим. До конструкцій, що розглядають, можна віднести прогони мостів [4], підкранові балки [5], кранові стріли [6], вежі [7], які широко застосовують у різних галузях промисловості [8]. Подібні пристрої мають підвищену несучу здатність [9], зменшену вагу [10], знижене енергетичне споживання як самих механізмів [11], так і всієї конструкції в цілому [12].

Відомо [13], що в робочій площині попередньо напруженої балки поздовжні стискальні зусилля впливають на балку ексцентрично. У результаті цього стріла прогину прогонової будови значно відхиляється від прямої форми [14], що може супроводжуватися порушенням сполучених із нею вузлів і механізмів [15], перекосом кінцевих балок [16] і пробуксуванням ходових коліс вантажного візка [17]. В окремих випадках підвищена

деформованість прогонової частини збільшує енергетичні витрати механізмів пересування внаслідок постійного руху вантажного візка для подолання створеного ухилу вантажного поясу на підйом [18].

Отже, особливу увагу необхідно приділяти визначенню і аналізу розрахункових і робочих деформацій прогонових будов для їх проектування та експлуатації. У зв'язку з цим насамперед слід проаналізувати і дослідити статичну та динамічну жорсткості мосту, оскільки ці два фактори є одними з основних критеріїв працездатності попередньо напружених прогонових будов, що є метою цієї статті. Перелічені вище завдання можуть бути позитивно вирішені з розглядом уточненої математичної моделі прогонової балки, у якій характер навантаження мосту, розрахункова та реальна схеми максимально наближені до конструктивної форми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Огляд проведених публікацій показує, що для прогонових балок із різними способами створення в них попередньої напруги було проведено велику кількість досліджень щодо основних критеріїв працездатності [19]. Ряд робіт був присвячений чисельному моделюванню подібних конструкцій [20], а також глибокому аналізу деформованого стану балки за різних співвідношень величин поперечного та поздовжнього навантажень [21]. Після цього проаналізовано поведінку напружено-деформованого стану

досліджуваних математичних моделей за довільного положення рухомого робочого навантаження по довжині прогону.

Особливий інтерес мають роботи, пов'язані з розрахунком прогину попередньо напруженого кранового мосту [22], і дослідження його статичної жорсткості у двох площинах – головній [23] і площини підвісу вантажу [24]. Залежно від величини поздовжнього ексцентриситетно-стискального зусилля були визначені оптимальні прогини та вигини балки у вертикальній площині за довільного положення вертикального рухомого навантаження [25].

Є роботи, у яких у традиційних розрахункових схемах попередньо напруженого кранового мосту враховували зміну геометричних характеристик його перерізу вздовж прогону [26], що дало змогу максимально наблизити розрахункову схему головної балки до реальних умов її конструктивного виконання і відповідно підвищити точність результатів отриманих розрахунків залежно від розташування рухомого робочого навантаження.

Унаслідок аналізу публікацій було встановлено, що напружено-деформований стан навантажених мостів розраховували за спрощеними схемами математичних моделей прогонової балки, у яких дію навантажень на балку у вертикальній площині оцінювали лише за рухомою робочою силою, залежною від вантажопідйомності крана. Спільний вплив робочого рухомого та нерухомого статичного навантажень у роботах не розглядали. У деяких випадках припускали, що невеликі зміни величини навантаження незначно впливають на деформацію мосту і напруги [27]. У той же час реальні прогини кранового мосту слід обов'язково визначати для спільної дії на балку сили тиску ходового колеса вантажного візка та власної ваги балки.

З іншого боку, для проектування звичайних кранових мостів нерухоме статичне навантаження прогонової будови

від ваги балки може бути орієнтовно оцінено за графіками або відповідними коефіцієнтами. Його вважають однією зі складових усіх вертикальних сил, що одночасно діють на балку [28], що в ряді випадків призводить до необґрунтовано завищених запасів його статичної або динамічної жорсткості [29].

Для нашого випадку подібний підхід неможливий, оскільки попередньо напружені балки не належать до систем, для яких застосований принцип суперпозиції. Невеликий ексцентриситет у додатку поздовжнього навантаження або невелике відхилення балки від прямої форми можуть мати істотний вплив на її прогин і напруги, що виникають. У зв'язку з цим поведінка напружено-деформованого стану прогонової будови може бути оцінена некоректно або помилково. Отже, вплив поздовжньої сили на поведінку попередньо напруженого мосту може бути досліджений шляхом розгляду кривої прогинів балки, для чого потрібне розроблення та розгляд іншої математичної моделі, у якій будуть ураховані зазначені вище питання.

Визначення мети та завдання дослідження. Мета роботи полягає в додатковому дослідженні статичної та динамічної жорсткості напружено-деформованого стану попередньо напруженої балки, де характер дії вертикальних навантажень на крановий міст має бути максимально наближеним до реальної схеми його навантаження.

Для досягнення позитивних результатів слід вирішити такі завдання: розглянути і проаналізувати вже відомі математичні моделі, де застосовано попередню напругу; розробити уточнену математичну модель прогонового крана, де характер дії навантажень на крановий міст максимально наближений до реальної схеми навантаження; проаналізувати одержані результати.

Основна частина дослідження. Розробляючи математичну модель, було прийнято припущення: вигин балки, що

спирається на ідеальні шарніри, відбувається у вертикальній площині пружної області роботи матеріалу балки. Розрахункова схема мосту подана на рис. 1, де l – довжина прогону балки; c – відстань від правої опори балки до рухомої вертикальної сили F , величина якої залежить від вантажопідйомності крана; q – розподілене завантаження від ваги балки; e – ексцентриситет додаток осьового навантаження S ; x – поточна координата

місця визначення прогину f балки; I – момент інерції перерізу мосту у вертикальній площині; E – модуль пружності матеріалу, з якого виготовлено балку.

Для спрощення позначаючи через EI жорсткість балки зі згинанням у площині підвісу вантажу $\frac{S}{EI} = k^2$, запишемо диференціальні рівняння кривої прогинів для лівої та правої частин балки:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = -\frac{x}{2EI} (2Fc + ql(l-x)) + k^2 e,$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = -\frac{l-x}{2EI} (qlx + 2F(l-c)) + k^2 e.$$

Повний інтеграл цих рівнянь

$$f = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + [e - \frac{Fcx}{lS} - \frac{q}{S} (\frac{2+k^2x(l-x)}{2k^2})],$$

$$f = C_3 \cos kx + C_4 \sin kx + [e - \frac{F(l-c)(l-x)}{lS} - \frac{q}{S} (\frac{2+k^2x(l-x)}{2k^2})].$$

Постійні інтегрування C_2, C_4 знаходимо з умов безперервності деформацій для переходу з однієї ділянки

прогону на іншу – у місці дії сили F , а C_1, C_3 з умов закріплення балки на опорах:

$$C_1 = \frac{q}{k^2 S} - e,$$

$$C_2 = \frac{F \sin kc}{kS \sin kl} + (\frac{q}{k^2 S} - e) \operatorname{tg} \frac{kl}{2},$$

$$C_3 = \frac{F \sin k(l-c)}{kS} + (\frac{q}{k^2 S} - e) (\frac{1 - \operatorname{tg}(0,5 kl) \sin kl}{\cos kl}),$$

$$C_4 = -\frac{F \sin k(l-c)}{kS \operatorname{tg} kl} + (\frac{q}{k^2 S} - e) \operatorname{tg} \frac{kl}{2}.$$

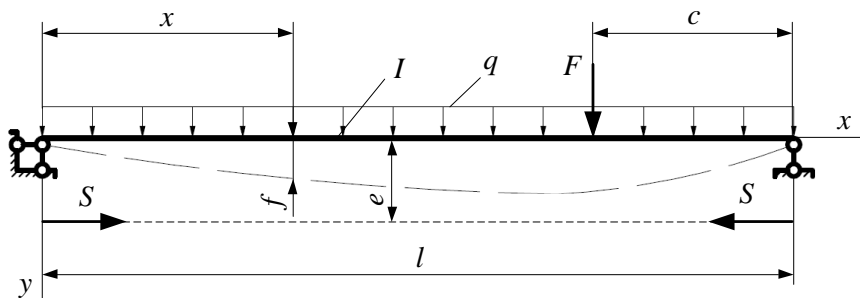


Рис. 1. Розрахункова схема мосту

Після нескладних перетворень отримуюмо рівняння для двох ділянок кривої

прогинів попередньо напруженої прогонової будови.

Для ділянки $0 \leq x \leq (l-c)$

$$f = (\cos kx + \sin kx \operatorname{tg}(kl/2) - 1) \left(\frac{q}{k^2 S} - e \right) + \frac{F}{S} \left(\frac{\sin kc \sin kx}{k \sin kl} - \frac{cx}{l} \right) - \frac{qx}{2S} (l-x),$$

ділянки $x \geq (l-c)$

$$f = (\cos kx + \sin kx \operatorname{tg}(kl/2) - 1) \left(\frac{q}{k^2 S} - e \right) + \frac{F}{S} \left(\frac{\sin k(l-c) \sin k(l-x)}{k \sin kl} - \frac{(l-c)(l-x)}{l} - \frac{qx}{2S} (l-x) \right).$$

Отже, отримано рівняння для визначення прогину в місці прогонової балки, що цікавить нас, за довільного положення тимчасового навантаження на мосту. Наведені вище рівняння зручні тим, що деформації мосту можуть бути визначені як за спільної дії на неї всіх вертикальних і горизонтальних сил, так і роздільної дії рухомого та нерухомого навантажень. За необхідності визначають вплив поздовжньої сили S на величину прогину тільки від тимчасового навантаження F , для чого приймають у виразах нульове значення розподіленого навантаження від ваги балки, тобто $q=0$. В іншому випадку, за необхідності визначення деформації тільки

від ваги балки, у наведених виразах приймають $F=0$.

Зазначимо, що несучу здатність конструкції оцінюють діючими в ній напружками. Диференціюючи двічі отримані рівняння прогинів, отримаємо вирази, за якими можуть бути визначені значення згинальних моментів M у довільному перерізі

$$M = -EI \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right).$$

Тоді для ділянки $0 \leq x \leq (l-c)$ момент у площині підвісу вантажу

$$M = (\cos kx + \sin kx \operatorname{tg} \frac{kl}{2}) \left(\frac{q}{k^2} - eS \right) + \frac{F \sin kc \sin kx}{k \sin kl} - \frac{q}{k^2},$$

ділянки $x \geq (l-c)$

$$M = (\cos kx + \sin kx \operatorname{tg} \frac{kl}{2}) \left(\frac{q}{k^2} - eS \right) + \frac{F \sin k(l-c) \sin k(l-x)}{k \sin kl} - \frac{q}{k^2} /.$$

Отже, отримано вирази, за допомогою яких можна дослідити напружено-деформований стан прогонової частини попередньо напруженої будови, а також провести розрахунки на міцність основних критеріїв працездатності – статичної і втомної міцності, статичної і динамічної жорсткості і загальної стійкості.

Результати досліджень. Отримані вирази дали змогу провести математичні дослідження деформованого стану попередньо напруженої балки, за яку було прийнято двотавр із номером профілю 24М, ексцентриситетом $h = 200$ мм, прогоном $l = 10,5$ м. Значення вертикальних поздовжніх навантажень були прийняті за рекомендаціями для зазначеного прогону вантажопідйомності мостових кранів – 0,5, 0,63, 1,0 т. Результати розрахунку кранової металевої конструкції наведено в таблиці, а частина з них – на рис. 2, 3. Деформації мосту подані як умовні прогини головної балки для групи режиму роботи 4К

$$\frac{f}{[f]}, \frac{f/l}{[f/l]}$$

з допустимим значенням умовного прогину $[f/l] = 2 \cdot 10^{-3}$ [31].

У таблиці в стовпчиках 3, 5, 7 наведено умовні прогини $f/[f]$ мосту за дії на балку у вертикальній площині тільки рухомого навантаження, значення яких були отримані автором статті в роботі [31]. У стовпчиках 4, 6, 8 наведені прогини у тих самих перерізах, але за спільної дії на балку рухомого та

стаціонарного нерухомого навантаження від ваги балки інтенсивністю q .

На рис. 2, 3 показано частину розрахованих стрілок прогинів балки, де цифрами 1...6 позначені деформації за рухомого вертикального навантаження вантажопідйомністю $F = 1$ т, цифрами 7...12 – за вантажопідйомності $F = 0,63$ т. Парними цифрами (2, 4, 6, 8, 10, 12) показано криві прогинів мосту за дії на балку рухомого та нерухомого навантажень, непарними (1, 3, 5, 7, 9, 11) – за дії лише вертикального рухомого навантаження.

Ураховано вплив поздовжньої сили S на напружено-деформовану поведінку прогонової балки у вертикальній площині. Криві прогинів мосту були отримані за співвідношення поздовжніх S і поперечних F сил, що діють на балку, у діапазоні

$$\frac{S}{F} = 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2.$$

Аналіз напружено-деформованого стану балки проводили відповідно до відомих двох найбільш несприятливих випадків навантаження попередньо напруженого мосту: знаходження рухомого вертикального навантаження F в середині прогону ($c = x = 0,5l$), де перевіряють розрахункові прогини; знаходження навантаження F над опорою або біля неї ($c = l, x = 0,5l$), де можливі зворотні вигини мосту.

Умовні прогини головної балки

$\frac{s}{F}$	Координата прогину f	Вантажопідйомність, t					
		0,5		0,63		1,0	
		F	F, q	F	F, q	F	F, q
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$x = 0,5l$	0,38	0,399	0,58	0,61	0,96	1,02
	$x = 0$	-0,12	-0,08	-0,12	-0,08	-0,12	-0,08
1,25	$x = 0,5l$	0,36	0,38	0,55	0,58	0,92	0,97
	$x = 0$	-0,17	-0,12	-0,17	-0,12	-0,17	-0,12
1,5	$x = 0,5l$	0,35	0,37	0,52	0,55	0,88	0,94
	$x = 0$	-0,20	-0,16	-0,20	-0,16	-0,20	-0,16
1,75	$x = 0,5l$	0,29	0,31	0,45	0,49	0,85	0,91
	$x = 0$	-0,25	-0,18	-0,25	-0,18	-0,25	-0,18
2	$x = 0,5l$	0,28	0,31	0,4	0,45	0,81	0,89
	$x = 0$	-0,3	-0,23	-0,3	-0,23	-0,3	-0,23

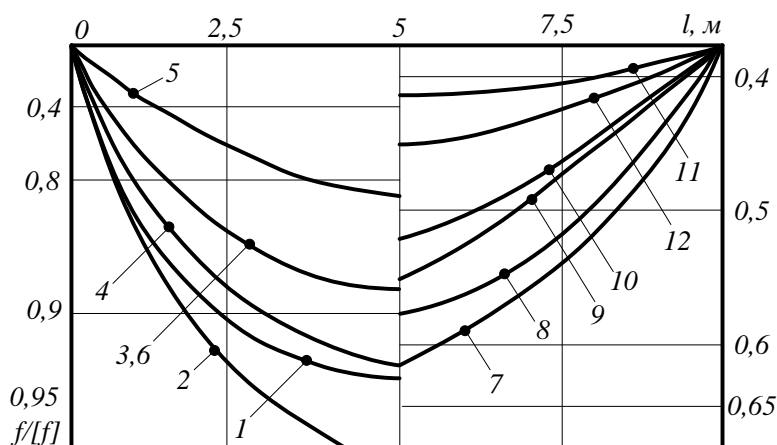


Рис. 2. Деформації балки та криві її прогинів

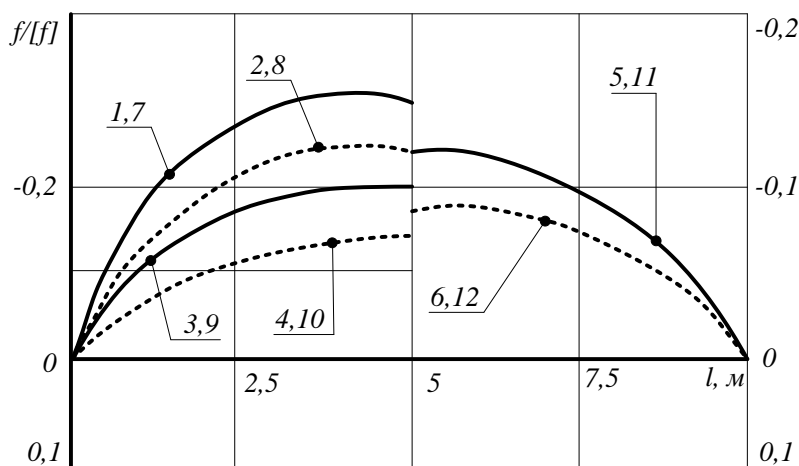


Рис. 3. Деформації балки та криві її прогинів за навантаження F

Аналізуючи в таблиці значення деформацій балки та криві її прогинів, подані на рис. 2, видно, що за співвідношення сил, які діють на балку, у зазначеному діапазоні розрахункові деформації мосту зростають від 5 до 10 % (рис. 2, криві 5, 6) порівняно з варіантом математичної моделі, де вагу балки не враховували. Пов'язано це з тим, що збільшення ексцентричної осьової сили суттєво впливає на величину прогинів балки у площині підвісу вантажу. Корисне для нас збільшення величини поздовжньої сили суттєво підвищує несучу здатність металеві конструкції, з одного боку, але з іншого – негативно впливає на стан мосту, збільшуючи його прогини за серединного положення тимчасового навантаження. Зазначимо, що зі збільшенням довжин прогонів крана прогини балки будуть тільки зростати.

Розглянуте питання слід обов'язково враховувати для проєктування головних балок мостових кранів із попередньою напругою, оскільки від нього залежить головне правило в кранобудуванні – забезпечення необхідної несучої здатності металевих конструкцій вантажопідійомних машин із дотриманням будь-яких безпечних режимів роботи, які можуть виникнути під час експлуатації.

На рис. 3 показані криві прогинів тієї самої балки для знаходження рухомого навантаження F над опорою ($c=l, x=0,5l$), де нумерація кривих відповідає нумерації на рис. 2. Характер кривих логічно показує зменшення деформацій (криві 2, 4, 6, 8, 10, 12) порівняно з варіантом, де вагу балки не

враховували (криві 1, 3, 5, 7, 9, 11). Розрахункові вигини мосту при цьому знижуються на 5-8 %, що значно полегшує роботу металеві конструкції та виключає ряд зазначених вище недоліків. У той же час, як і в першому випадку навантаження, збільшення величини ексцентричної поздовжньої сили, а також довжини прогону мосту призводить до зростання вигину.

Висновки. У роботі розроблено математичну модель попередньо напруженої конструкції, що дає змогу досліджувати напружено-деформований стан мосту за спільної та роздільної дії на нього вертикальних рухомих і стаціонарних нерухомих навантажень з урахуванням впливу на балку ексцентричної поперечної сили.

Отримані авторами рівняння кривих прогинів (вигинів) головної балки мостового крана дали змогу проаналізувати її деформовану поведінку за співвідношення поздовжніх і поперечних сил, що діють на балку, у діапазоні

$$\frac{S}{F} = 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2.$$

Результати можуть бути використані для вдосконалення методів розрахунку за проєктування прогонових балок мостових кранів. Крім того, наведені авторами рекомендації можуть бути використані для модернізації кранів із метою підвищення їхньої вантажопідійомності, а також збільшення терміну служби вантажопідійомної машини без демонтажу.

Список використаних джерел

1. Paez Pablo M., Sensale-Cozzano Beradi. Time-dependent analysis of simply supported and continuous unbounded prestressed concrete beams. *Engineering Structures*. Vol. 240 (2021). DOI:10.1016/j.engstruct.2021.112376.
2. Jianqun W., Shenghua T., Zheng H., Zhou C., Zhu M. Flexural behavior of a 30-meter full-scale simply supported prestressed concrete box girder. *Appl. Sci.* 10(9), 30–76 (2020).
3. Kokhno V. Prestressing of reinforcement. Methods for creating prestress in reinforced concrete structures. *Appl. Sci.* 3(398), 18-21 (2022).

4. Lee D., Park M., Joo H., Han S., Kim K. Strengths of Thick Prestressed Precast Hollow-Core Slab Members Strengthened in Shear. *ACI Structural Journal*. 117(2), 129–139 (2020).
5. Losanno D., Simone Galano S., Parisi F. Influence of strand rupture on flexural behavior of reduced-scale prestressed concrete bridge girders with different prestressing levels. *Engineering Structures*. IF 5.5 (2023). DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.117358.
6. Dustin Black. Prestressed Concrete Bridge Girders. *Structural Rehabilitation*. 2 (2021). URL: <https://www.structuremag.org/?p=17457>.
7. Hu L., Feng P. Prestressed CFRP-reinforced steel columns under axial and eccentric compression. *Compos. Struct*. 268 (2021).
8. Lee D., Han S. J., Ju H., Kim K. S. Shear strength of prestressed concrete beams considering bond mechanism in reinforcement. *ACI Structural Journal*. 118(3), 267-277 (2021). DOI: 10.14359/51730531.
9. Kang T., Lee D., Yerzhanov M. and Ju. H. ACI 318 Shear Design Method for Prestressed Concrete Members. *Concrete International*. 43(10), 42–50. (2021).
10. Bruwiler E. Improving the strength and performance characteristics of bridge structures using ultra-high-strength fiber-reinforced concrete. *Concepts and practical application*. *Road Power*, 48–51 (2020).
11. Naidenko E., Bondar O., Boiko A., Fomin O., Turmanidze R. Control Optimization of the Swing Mechanism. In: Tonkonogyi V., Ivanov V., Trojanowska J., Oborskyi G., Pavlenko I. (eds) *Advanced Manufacturing Processes III*. InterPartner 2021. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham (2022).
12. Bonopera M., Chang K., Lee Z.-K. State-of-the-art review on determining prestress losses in prestressed concrete girders. *Appl. Sci*. 10, 72–57 (2020).
13. Tan M., Cheng W. Non-linear lateral buckling analysis of unequal thickness thin-walled box beam under an eccentric load. *Thin Walled Struct*. 139, 77–90 (2019).
14. Park M., Lantsoght E., Zarate Garnica G., Yang Y., Sliedrecht H. Analysis of shear capacity of prestressed concrete bridge girders. *ACI Struct J*. 118, 75-88 (2021).
15. Obernikhin D., Nikulin A. Experimental studies of deflections in bending reinforced concrete elements taking into account the influence of the shape of their cross-section. 151, 56-62 (2021).
16. Yao G., Xiong X. Quantitative study on deformation performance index of prestressed steel-concrete beams under bending. *Struct*. 43, 284-293 (2022). DOI: 10.14006/j.jzjgxb.2020.0784.
17. Han T., Liang S., Zhu X., Wang W., Yang J. Numerical analysis of vertical behavior of large-span prestressed steel reinforced concrete slab. *J. Southeast Univ*. 53, 218–228 (2023), DOI: 10.3969/i.issn.1001-0505.2023.02.000.
18. Shuai Fei, Ge Zhihao, Tong Yifei, Li Xiangdong. Characteristics analyses of energy consumption for bridge crane based on the energy flow. *IOP Conference Series Materials Science and Engineerin*. 758(1) (2020).
19. Sokolov S., Plotnikow D., Grachev, Lebedev V. Evaluation of loads applied on engineering structures based on structural health monitoring data. *International Review of Mechanical Engineering*. 14(2), 146-150 (2020). DOI: 10.15866/ireme.v14i2.18269.
20. Eisa A., Kotrasova K., Sabol P., Mihaliková M., Attia M. Experimental and numerical study of strengthening prestressed reinforced concrete beams using different techniques. *Appl. Sci*. 14(1) (2024).
21. Marcela Moreira da Rocha Almeida, Alex Sander Clemente de Souza, Augusto Teixeira de Albuquerque, Alexandre Rossi. Parametric analysis of steel-concrete composite beams prestressed with external tendons. *Journal of Constructional Steel Research*. 189 (2022).

22. Luna Vera O. S., Oshima Y., Kim C. W. Flexural performance correlation with natural bending frequency of post-tensioned concrete beam. Experimental investigation. J. Civ. Struct. Health Monit. 10, 135-151 (2020).
23. Han T., Liang S., Zhu X., Wang W. & Yang J. Numerical analysis of vertical behavior of large-span prestressed steel reinforced concrete slab. J. Southeast Univ. 53, 218-228 (2023). doi.org/10.3969/i.issn.1001-0505.2023.02.000.
24. Tkachev O., Tkachev A., Prokopovych I. Operation of pre-stressed span beams of bridge cranes taking into account load combinations. Proceedings of Odessa Polytechnic University: Scientific, science and technology collected articles. 1(65), 40-46 (2020).
25. Tkachev A., Tkachev O. The influence of the nature of the action of the external load on the stiffness of the main beams of bridge cranes. Lifting and transport equipment. 1 (62), 51-60 (2020).
26. Prokopovych A., Tkachev O., Tkachev P. The effect of variable cross-section of prestressed beams on the load-bearing capacity of the structure. Proceedings of Odessa Polytechnic University: Scientific, science and technology collected articles. 2(66), 16-23 (2022).
27. Tiancheng Han, Shuting Liang, Xiaojun Zhu, Wenkang Wang, Jian Yang. An investigation of the flexural behaviour of large-span prestressed and steel-reinforced concrete slabs. Scientific Reports. 1 (2023). doi.org/10.1038/s41598-023-37137-6.
28. Canestro E., Strauss A., Sousa H. Multiscale modelling of the long-term performance of prestressed concrete structures – Case studies on T-Girder beams: Eng Struct. Vol. 231 (2021).
29. Almeida M., Sander A., Clemente de Souza, Augusto Teixeira de Albuquerque, Alexandre Rossi A. Parametric analysis of steel-concrete composite beams prestressed with external tendons. Journal of Constructional Steel Research. 189 (2021). DOI:10.1016/j.jcsr.2021.107087.
30. Kaptelin S., Marchenko M. Prestressing of beam span structures. Track and track management. 9, 25-28 (2020).
31. Tkachev A., Tkachev O., Fomin O., Bondar O., Naidenko E. Influence of Horizontal Inertial Loads on the Operation of Overhead Crane Girders. Advances in Design, Simulation and Manufacturing V Proceedings of the 5th International Conference on Design, Simulation, Manufacturing: The Innovation Exchange, DSVIE-2022, June 7-10, Poznan, Poland. Vol. 2: Mechanical and Chemical Engineering, Odessa, Ukraine. P. 47-54 (2022).

Ткачов Анатолій Вікторович ^[0000-0002-2456-7533], кандидат технічних наук, доцент, Національний університет «Одеська політехніка». 0487265854. E-mail: tavtkach@ukr.net.

Ткачов Олексій Анатолійович ^[0000-0002-4173-6175], кандидат технічних наук, Інститут машинобудування, Національний університет «Одеська політехніка». 0487265854. E-mail: tavtkach@ukr.net.

Мироненко Сергій Володимирович ^[0000-0002-1597-1796], кандидат технічних наук, доцент, Одеський автомобільно-дорожній фаховий коледж, Національний університет «Одеська політехніка». 0487265854. E-mail: mirserg@ukr.net.

A. Tkachev^[0000-0002-2456-7533], PhD., Assoc. Prof., National University «Odesa Polytechnic». 0487265854. E-mail: tavtkach@ukr.net.

O. Tkachev^[0000-0002-4173-6175], PhD., Institute of Mechanical Engineering, National University «Odesa Polytechnic». 0487265854. E-mail: tavtkach@ukr.net.

S. Myronenko^[0000-0002-1597-1796], PhD., Odesa Automobile and Road Professional College of the National University «Odesa Polytechnic». 0487265854. E-mail: mirserg@ukr.net.

Статтю прийнято 12.12.2024 р.