УДК 624.016.001.2 DOI: https://doi.org/10.18664/1994-7852.138.2013.102484

Кандидати техн. наук Ю.П. Китов,
М.А. Веревичева

Y.P. Kitov,
M.A. Verevicheva

ОПТИМИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

OPTIMIZATION OF THE STATICALLY INDEFINABLE BEAMS OF VARIABLE SECTION

Представил д-р техн. наук, профессор А.Н. Даренский

Постановка задачи в общем виде. Одним из направлений развития современного строительства является внедрение в строительную практику эффективных видов строительных конструкций. В связи с этим большое распространение получила практика оптимизации конструктивных решений. Как показывают исследования [1-3], ограничения задач оптимизации статически неопределимых ферм, балок и рам являются нелинейными, а сами задачи могут иметь несколько оптимальных решений, которые существенно различаются по массе или стоимости. В связи с этим разработка теории и эффективных методов решения многоэкстремальных задач оптимизации стержневых систем является актуальной проблемой проектирования строительных конструкций.

Обзор последних исследований. В настоящее время накоплен значительный опыт постановки и решения задач оптимизации строительных конструкций с использованием математических методов [4-6]. В частности, обобщение вариационных методов Лагранжа и Кастильяно применительно к задачам оптимального проектирования стержневых систем приводятся в работе [4]; градиентные методы, метод Ньютона и другие применительно к задачам оптимизации строительных конструкций описаны в работе [5]. Приложения известных методов к решению задач, возникающим в современном строительстве, предлагаются в работе [6].

Цель исследований. Каждый из известных методов позволяет решать широкий класс задач. Однако при оптимизации каждой конструкции возникает необходимость общие методы адаптировать к конкретной задаче.

В данной работе на примере одной частной задачи продемонстрирован способ выбора оптимального решения, в котором известный аналитический метод совмещается с численными оценками. Такая методика удобна в практических приложениях.

Постановка задачи. В качестве примера оптимального проектирования рассмотрим однопролетную статически неопределимую балку переменного сечения, нагруженную постоянной нагрузкой q (рис. 1). На участке $[0, x]$ высота сечения равна h_1, на участке $[x, l]$ высота h_2. Ширина сечения равна b; принимается максимальное соотношение $b = h_2/5$.

Требуется найти соотношение $\xi = x/l$, обеспечивающее минимум объема балки V. Таким образом, функцией цели является

$$V = bl\left[\xi h_1 + (1-\xi)h_2\right] = \frac{h_2}{5}l\left[\xi h_1 + (1-\xi)h_2\right]. \tag{1}$$

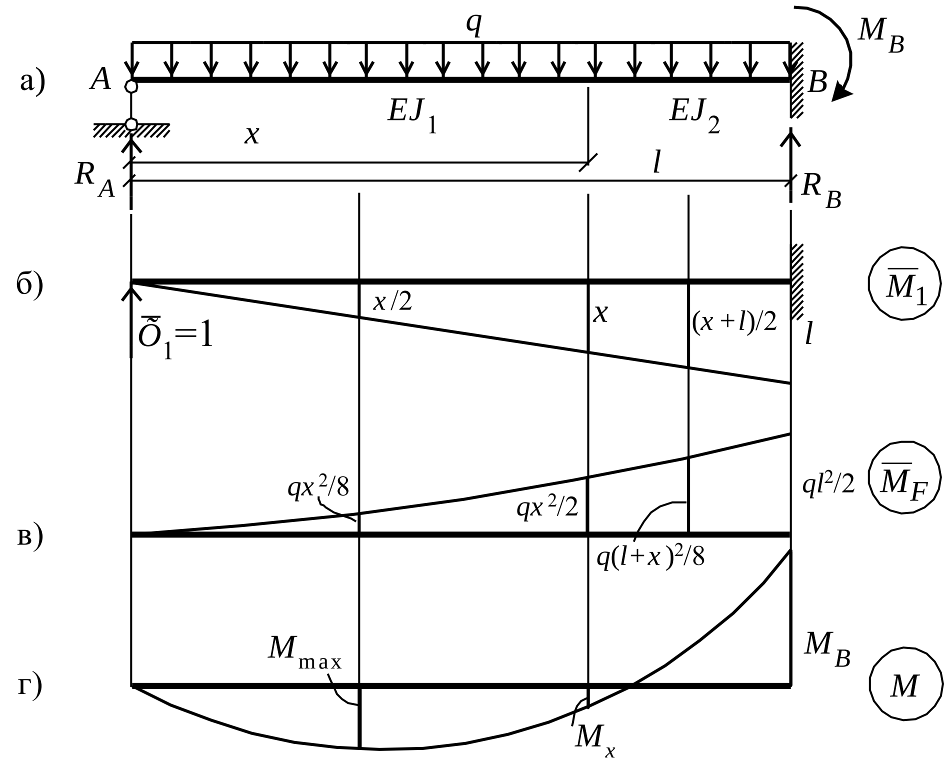

Рис. 1. Расчетная схема балки (а); единичная и грузовая эпюры изгибающих моментов (б, в); эпюра изгибающих моментов в заданной системе (г)

Выразим высоты h_1 и h_2 из условия равнопрочности участков балки разной жесткости, то есть потребуем выполнения условий

$$\frac{M_{\max}}{bh_1} \le [\sigma], \ \frac{M_x}{bh_1} \le [\sigma], \ \frac{|M_B|}{bh_2} = [\sigma].$$

Для этого найдем изгибающие моменты, воспользовавшись методом сил (рис. 1):

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_F,$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{ql^4}{8EJ_2}\left[n\xi^4 + (1-\xi)\left(\xi^3 + \xi^2 + \xi + 1\right)\right],$$

$$\delta_{11} = -\frac{l^3}{3EJ_2}\left[n\xi^3 + (1-\xi)\left(\xi^2 + \xi + 1\right)\right],$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{3ql\xi}{8}\frac{n+s}{n+k},$$

где n – соотношение жесткостей участков балки,

$$n=\frac{J_2}{J_1}=\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3;$$

$$s=\frac{1}{\xi^4}-1,\; k=\frac{1}{\xi^3}-1.$$

Найдем изгибающие моменты в характерных сечениях:

экстремальный момент

$$M_{\max}=\frac{9ql^2}{128}\left(\xi\frac{n+s}{n+k}\right)^2; \tag{2}$$

наибольший момент

$$\left|M_B\right|=\frac{ql^2}{8}\left(4-3\xi\frac{n+s}{n+k}\right); \tag{3}$$

В месте изменения размеров сечения

$$M_x=\frac{ql^2}{8}\xi^2\left(3\frac{n+s}{n+k}-4\right). \tag{4}$$

Подберем сечения на двух участках.

Из условий прочности высота сечения на первом участке $[0,x]$ с учетом принятого соотношения $b=h_2/5$ будет большей из двух:

$$h_1=\max(h_{11},h_{12}),$$

где

$$h_{11}=\sqrt{\frac{6M_{\max}}{bmR_y}}=\frac{3l}{8}\sqrt{\frac{3q}{bmR_y}}\frac{n+s}{n+k}\xi=\frac{3l}{8}\sqrt{\frac{15q}{mR_y}}\frac{n+s}{n+k}\xi\sqrt{\frac{1}{h_2}}; \tag{5}$$

$$h_{12}=\sqrt{\frac{6\left|M_\xi\right|}{bmR_y}}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{15q}{mR_y}}\xi\frac{n+s}{n+k}\sqrt{4-3\frac{n+s}{n+k}}\sqrt{\frac{1}{h_2}}. \tag{6}$$

На втором участке $[x,l]$ из условия прочности

$$h_2=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{3q}{bmR_y}}\sqrt{4-3\xi\frac{n+s}{n+k}}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{15q}{mR_y}}\sqrt{4-3\xi\frac{n+s}{n+k}}\sqrt{\frac{1}{h_2}}. \tag{7}$$

Введем обозначения:

$$a=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{3q}{bmR_y}}=\text{const},\; \alpha=\sqrt[3]{a^2},$$

$$\gamma=\frac{n+s}{n+k}=\gamma(n(\xi),\xi).$$

Из формулы (7) с учетом обозначений получаем

$$h_2=\alpha\sqrt[3]{4-3\xi\gamma}. \tag{8}$$

Подставляем выражение (8) в выражения (5) и (6):

$$h_{11}=\frac{3}{4}a\xi\gamma\frac{1}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}}, \tag{9}$$

$$h_{12}=a\xi\gamma\frac{\sqrt{4-3\gamma}}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}}. \tag{10}$$

Из формул (8) – (10) видно, что высоты h_{11}, h_{12}, h_2 являются функциями $n(\xi), \xi$:

$$h_i = h_i(n(\xi), \xi), \ i = 1, 2. \qquad (11)$$

Таким образом, минимизируемая функция объема также является функцией от $n(\xi), \xi$:

$$V = V(n(\xi), \xi). \qquad (12)$$

Оптимизация объема. Минимум функции (1) достигается при условии

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{h_2}{5} l \left[h_1 + \xi \frac{dh_1}{d\xi} - h_2 + (1-\xi)\frac{dh_2}{d\xi} \right] + \frac{1}{5}\frac{dh_2}{d\xi} l \left[\xi h_1 + (1-\xi) h_2 \right] = 0,$$

т. е.

$$h_2 \left[h_1 + \xi \frac{dh_1}{d\xi} - h_2 + (1-\xi)\frac{dh_2}{d\xi} \right] + \frac{dh_2}{d\xi} \left[\xi h_1 + (1-\xi) h_2 \right] = 0. \qquad (13)$$

Чтобы найти из уравнения (11) оптимальное значение ξ (и тем самым n), нужно сначала выразить через ξ производные $\frac{dh_1}{d\xi}$ и $\frac{dh_2}{d\xi}$. Приняв для h_1 и h_2 общее обозначение h, производные ищем в виде [7]:

$$\frac{dh(n(\xi), \xi)}{d\xi} = \frac{\partial h}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{\partial h}{\partial \xi}. \qquad (14)$$

Все частные производные в этом выражении, кроме $\frac{\partial n}{\partial \xi}$, определяются из формул (8) – (10). Поскольку функция $n(\xi)$ выражается через ξ неявным образом, для определения $\frac{\partial n}{\partial \xi}$ (в нашем случае $\frac{\partial n}{\partial \xi} \equiv \frac{dn}{d\xi}$) воспользуемся формулой дифференцирования неявной функции [7].

Определение производной $\frac{dn}{d\xi}$. Проведем некоторые преобразования формул (8) – (10).

Из соотношения $n = \frac{J_2}{J_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3$ получаем

$$h_1(\xi, n) = \frac{h_2(\xi, n)}{\sqrt[3]{n}},$$

$$\frac{h_2}{\sqrt[3]{n}} - \frac{3}{4}\alpha\xi\gamma\frac{1}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}} = 0. \qquad (15)$$

Согласно формуле (8) заменяем в формуле (15) h_2:

$$\alpha\sqrt[3]{4-3\xi\gamma}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{3}{4}\alpha\xi\gamma\frac{1}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}} = 0.$$

Введя обозначение

$$F_{11}(n(\xi), \xi) = \sqrt[3]{\frac{4-3\xi\gamma}{n}} - \frac{3}{4}\xi\gamma\frac{1}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}},$$

получаем выражение $n(\xi)$ в неявном виде:

$$F_{11}(n(\xi),\xi)=\sqrt[3]{\frac{4-3\xi\gamma}{n}}-\frac{3}{4}\xi\gamma\frac{1}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}}=0. \tag{16}$$

Аналогично получаем выражение для $n(\xi)$, используя формулу (9) для h_{12}:

$$F_{12}(n(\xi),\xi)=\sqrt[3]{\frac{4-3\xi\gamma}{n}}-\xi\frac{\sqrt{4-3\gamma}}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}}=0. \tag{17}$$

Согласно работе [7]

$$\frac{dn}{d\xi}=-\frac{\partial F_1}{\partial\xi}\Big/\frac{\partial F_1}{\partial n} \tag{18}$$

($F_1=F_{11}$ или $F_1=F_{12}$).

Берем нужные для вычисления $\frac{dn}{d\xi}$ производные, вводя для компактности некоторые обозначения:

$$f_1=\xi\gamma,\ \ \gamma=\gamma(n(\xi),\xi),$$

$$f_2=4-3\xi\gamma=4-3f_1,$$

$$f_3=\sqrt[3]{4-3\xi\gamma}=\sqrt[3]{f_2},$$

$$f_4=\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}=\sqrt[6]{f_2},$$

$$f_5=\sqrt[3]{\frac{f_2}{n}},$$

$$f_6=4-3\gamma,$$

$$f_7=\xi\sqrt{4-3\gamma}=\xi\sqrt{f_6}.$$

Тогда функции F_{ij} и их производные равны:

$$F_{11}=f_5-\frac{3}{4}\xi\gamma\frac{1}{f_4}=f_5-\frac{3}{4}\frac{f_1}{f_4},$$

$$F_{12}=f_5-\xi\frac{\sqrt{f_6}}{f_4}=f_5-\frac{f_7}{f_4},$$

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial n}=f'_{5n}-\frac{3}{4}\xi\frac{\gamma'_n f_4-\gamma f'_{4n}}{f_3}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial\xi}=f'_{5\xi}-\frac{3}{4}\frac{f'_{1\xi}f_4-f_1f'_{4\xi}}{f_3}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial n}=f'_{5n}-\xi\frac{\frac{1}{2\sqrt{f_6}}f'_{6n}f_4-\sqrt{f_6}f'_{4n}}{f_3}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial\xi}=f'_{5\xi}-\frac{f'_{7\xi}f_4-f_7f'_{4\xi}}{f_3}, \tag{22}$$

где

$$f'_{2n}=-3\boldsymbol{\xi\gamma'_n},\ \ f'_{4n}=\frac{1}{6}f_2^{-5/6}f'_{2n},\ \ f'_{5n}=\frac{1}{3}\left(\frac{f_2}{n}\right)^{-2/3}\frac{f'_{2n}n-f_2}{n^2},\ \ f'_{6n}=-3\gamma'_n,$$

$$f'_{1\xi}=\gamma+\xi\gamma'_{\xi},\ f'_{2\xi}=-3f'_{1\xi},\ f'_{3\xi}=\frac{1}{3}f_2^{-2/3}f'_{2\xi},$$

$$f'_{4\xi}=\frac{1}{6}f_2^{-5/6}f'_{2\xi},\ f'_{5\xi}=\frac{1}{3}\left(\frac{f_2}{n}\right)^{-2/3}\frac{f'_{2\xi}}{n},\ f'_{6\xi}=-3\gamma'_{\xi},\ f'_{7\xi}=\sqrt{f_6}+\xi\frac{f'_{6\xi}}{2\sqrt{f_6}},$$

$$\gamma'_{\xi}=\frac{s'(n+k)-k'(n+s)}{(n+k)^2},\quad \gamma'_n=\frac{k-s}{(n+k)^2},$$

$$s'=-\frac{4}{\xi^5},\quad k'=-\frac{3}{\xi^4}.$$

Пользуясь формулами (19) – (22), из формулы (18) определяем $\frac{dn}{d\xi}$ при $F_1=F_{11}$ (т. е. при $h_1=h_{11}$) и при $F_1=F_{12}$ (т. е. при $h_1=h_{12}$).

Определение частных производных $\frac{\partial h}{\partial n},\frac{\partial h}{\partial \xi}$ (для формулы (14)). Дифференцируем (8) – (10), пользуясь введенными обозначениями:

$$h_{11}=\frac{3}{4}\alpha\xi\gamma\frac{1}{f_4}=\frac{3}{4}\alpha\frac{f_1}{f_4},$$

$$h_{12}=\alpha\frac{\xi\sqrt{f_6}}{f_4}=\alpha\frac{f_7}{f_4},$$

$$h_2=\alpha f_3,$$

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial n}=\frac{3}{4}\alpha\xi\frac{\gamma'_n f_4-\gamma f'_{4n}}{f_3}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial h_{12}}{\partial n}=\alpha\xi\frac{\frac{1}{2\sqrt{f_6}}f'_{6n}f_4-\sqrt{f_6}f'_{4n}}{f_3}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial n}=\alpha\frac{1}{3}f_2^{-2/3}f'_{2n}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial \xi}=\frac{3}{4}\alpha\frac{f'_{1\xi}f_4-f_1f'_{4\xi}}{f_3}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial h_{12}}{\partial \xi}=\alpha\frac{f'_{7\xi}f_4-f_7f'_{4\xi}}{f_3}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial \xi}=\alpha f'_{3\xi}. \quad (28)$$

Порядок формирования уравнений оптимизации. Разбиваем участок изменения ξ на заданное число интервалов, ограниченных точками $\xi_1,\xi_2,\dots$. Для каждой точки выполняем следующие действия:

– согласно формулам (16) и (17) (т. е. при $h=h_{11}$ и $h=h_{12}$) получаем табличные значения функции $n(\xi)$ в точках $\xi_1,\xi_2,\dots$ методом половинного деления из уравнений

$$\sqrt[3]{\frac{4-3\xi\gamma}{n}}-\frac{3}{4}\xi\gamma\frac{1}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}}=0, \quad (29)$$

$$\sqrt[3]{\frac{4-3\xi\gamma}{n}}-\xi\frac{\sqrt{4-3\gamma}}{\sqrt[6]{4-3\xi\gamma}}=0. \qquad (30)$$

– определяем $\dfrac{\partial F_1}{\partial n}, \dfrac{\partial F_2}{\partial n}, \dfrac{\partial F_1}{\partial \xi}, \dfrac{\partial F_2}{\partial \xi}$ по формулам (19) – (22);

– определяем $\dfrac{dn}{d\xi}$ по формуле (18) при $h=h_{11}$ и $h=h_{12}$;

– определяем h_{11}, h_{12}, h_2 (при $h=h_{11}$ и $h=h_{12}$) по формулам (8) – (10);

– определяем $\dfrac{\partial h_{11}}{\partial n}, \dfrac{\partial h_{11}}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial h_{12}}{\partial n}$, $\dfrac{\partial h_{12}}{\partial \xi}$ и $\dfrac{\partial h_2}{\partial n}, \dfrac{\partial h_2}{\partial \xi}$ при $h=h_{11}$ и $h=h_{12}$ по формулам (23) – (28);

– подставляя найденные величины в левую часть формулы (13), получаем значения производной минимизируемой функции $\dfrac{dV}{d\xi}$ в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Точку, в которой производная изменяет знак, переходя через ноль, считаем точкой экстремума.

Пример решения задачи оптимизации. Рассчитывалась задача (1) при $l=1200$ см, $q=20$ кг/см, $mR_y=2000$ кг/см^2. Значение ξ изменялось в интервале $0.75 \le \xi \le 0.9$.

Начальное значение объема $V_0 = 342879$ см^3.

Результаты расчетов приведены в таблице; Δ – процент уменьшения объема по сравнению с начальным.

Таблица

ξ	n	h_1, см	h_2, см	b, см	V, см^3	Δ
0.818	4.32	25.51	41.80	8.36	285743	15.66

На рис. 2 приведены графики изменения объема (а) и его производной (б) в зависимости от ξ. Видно, что в интервале $0.818 \le \xi \le 0.825$ объем практически не изменяется, процент улучшения Δ изменяется на 0.01 %.

Выводы. В работе предложен способ оптимизации статически неопределимой балки переменного сечения с применением численных методов. Это обусловлено наличием неявно заданных функций, входящих в выражение для функции цели. Приведен алгоритм решения задачи по предложенной методике и приведен пример решения.

а)

б)

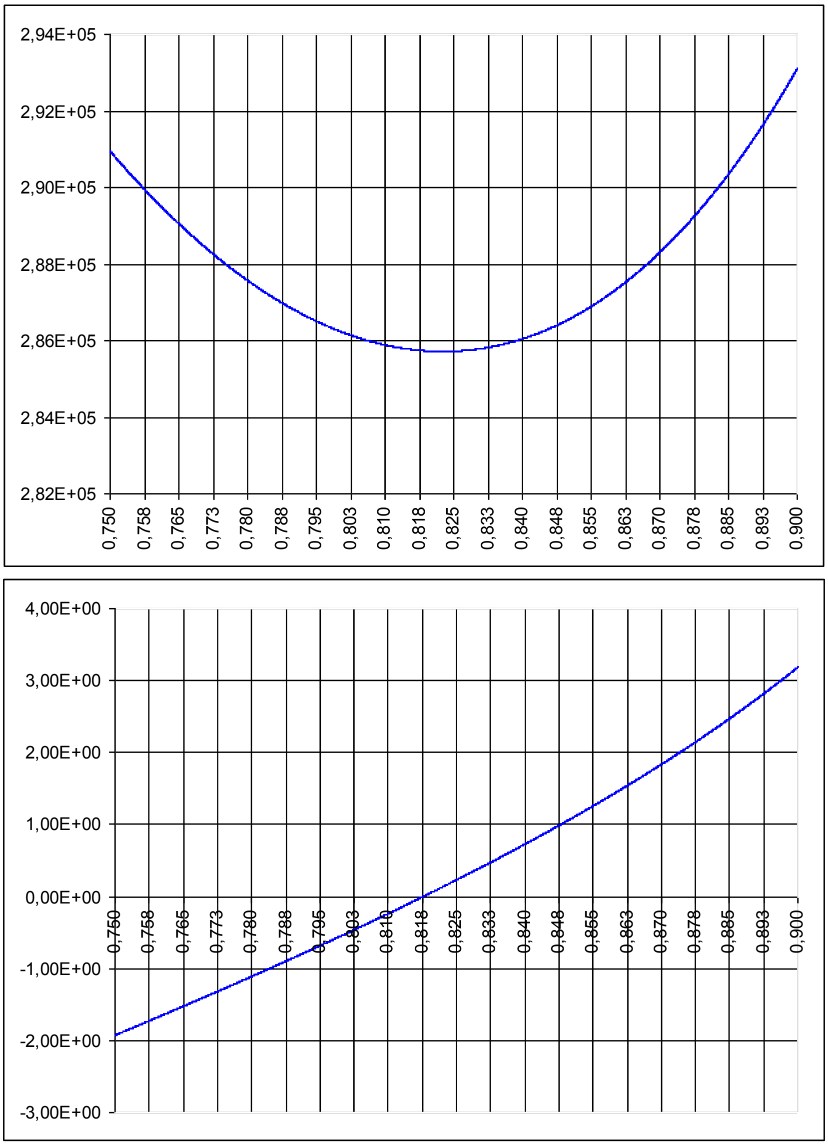

Рис. 2. Результат решения задачи: изменение объема (а) и его производной (б) в зависимости от соотношения ξ

Список литературы

1. Виноградов, А.И. Проблема оптимального проектирования в строительной механике [Текст] / А.И. Виноградов. – Харьков: Вища шк., 1973. – 168 с.

2. Лазарев, И.Б. Математические методы оптимального проектирования конструкций [Текст] / И.Б. Лазарев. – Новосибирск, 1974. – 191 с.

3. Китов, Ю.П. Применение динамического программирования к расчету оптимальных статически определимых ферм [Текст] / Ю.П. Китов, И.С. Храповицкий // Труды ХИИТ. – Харьков: ХИИТ, 1971. – Вып. 127. – С. 54-62.

4. Клюев, С.В. Оптимальное проектирование стержневых систем [Текст] / С.В. Клюев. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2007. – 130 с.

5. Волков, Е.А. Численные методы [Текст] / Е.А. Волков. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.

6. Новые направления оптимизации в проектировании строительных конструкций [Текст]: сб. статей / Белгород. гос. технолог. ун-т им. В.Г. Шухова; ред. А.Г. Юрьев. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2006. – 91 с.

7. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1970. – 608 с.

Ключевые слова: оптимизация, функция цели, статически неопределимая балка, переменное сечение, равнопрочность.

Аннотации

На прикладі оптимізації статично невизначної балки змінного перерізу продемонстровано спосіб вибору оптимального рішення, який поєднує аналітичні та чисельні оцінки, що є зручним у практичному використанні.

На примере оптимизации статически неопределимой балки переменного сечения продемонстрирован способ выбора оптимального решения, совмещающий аналитические и численные оценки, что удобно в практических приложениях.

On the example of optimizing of the statically indeterminate beam with variable cross sections show you how to select the best solutions, combining analytical and numerical estimates, which is useful in practical applications.