

УДК 621.3.01

*Кандидаты техн. наук П.Я. Придубков,
А.Н. Прогонный,
О.М. Ананьева*

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ РЕЛЬСОВЫХ ЦЕПЕЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Представил д-р техн. наук, профессор М.М. Бабаев

Вступление. В процессе обеспечения безопасности движения железнодорожного транспорта большую роль играют такие электротехнические устройства как рельсовые цепи. С их помощью осуществляется контроль цельности рельсовых нитей, занятости железнодорожного пути, автоматическая локомотивная сигнализация и т.д.

Данное устройство (рельсовая цепь) является не только электрической цепью, но и магнитной. Магнитный поток в рельсовой цепи помимо ферромагнитных рельсовых нитей замыкается и по окружающей среде (по воздуху), где образуется магнитное поле рассеяния. Стало быть, рельсовые цепи являются магнитными цепями с распределенными параметрами, причем, закон распределения

магнитного потока по длине того или иного участка рельсовой цепи заранее неизвестен [3]. Влияние окружающей среды существенно усложняет картину магнитного поля, сближая тем самым задачу расчета магнитной рельсовой цепи с задачей расчета магнитного поля. При этом необходимо учитывать, что транспортное средство и рельсовая цепь находятся в движении относительно друг друга

Стало быть, исследование основных дифференциальных величин, характеризующих магнитное поле рельсовых цепей, и уточнение аналитических зависимостей, описывающих воздействие этого поля на электромагнитные параметры электротехнических систем транспортных средств, являются весьма актуальными проблемами.

Задачей настоящей работы является исследование магнитного поля, создаваемого намагниченным телом, рельсовой нитью, и его влияния на электромагнитные параметры систем транспортных средств, а также установление аналитических зависимостей параметров данного поля от геометрических размеров тела и его намагниченности, что позволяет повысить эффективность функционирования устройств дефектоскопии, идентификации, автоматической локомотивной сигнализации.

Основная часть. Железнодорожное рельсовое полотно (рельсовая цепь) и транспортное средство перемещаются относительно друг друга со скоростью движения железнодорожного состава. Следовательно, электромагнитные процессы систем железнодорожного транспорта поддаются правильному расчёту и чёткому объяснению только на основе законов релятивистской электродинамики в рамках специальной теории относительности.

Всякое событие любого физического процесса, протекающего на железнодорожном транспорте (в его системах), следует рассматривать в двух инерциальных системах четырёхмерного пространственно – временного многообразия, на осях которого

откладываются три пространственных координаты X, y, Z и одна временная jt . В каждой точке данного многообразия может наступить то или иное событие, представляющее собой мгновенный физический процесс.

При записи уравнений, описывающих электромагнитные процессы электротехнических устройств железнодорожного транспорта, следует пользоваться четырёхмерным формализмом специальной теории относительности.

Важнейший постулат данной теории – о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчёта – приводит к инвариантности квадратичной формы элементарного интервала четырёхмерного евклидового пространства, отнесённого к системе прямолинейных ортонормированных координатных осей, [1]

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (1)$$

Координатами четырёхмерного пространства являются три пространственных x, y, z и одна временная jt . Если положить

$$x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; x_4 = jt,$$

то уравнение (1) запишется в виде

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 = \sum_{\mu=1}^4 (dx_{\mu})^2. \quad (2)$$

Выражение (2) описывает элементарный интервал четырёхмерного евклидового пространства, отнесённый к системе ортонормированных прямолинейных координатных осей.

Прямолинейные оси характеризуются заданием четырёх единичных векторов $\mathbf{e}_{\mu} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, поэтому можно положить

$$ds = \mathbf{e}_1 dx_1 + \mathbf{e}_2 dx_2 + \mathbf{e}_3 dx_3 + \mathbf{e}_4 dx_4.$$

Скалярное произведение $(ds \cdot ds) = ds^2$ совпадает с (2) только в том случае, если векторы \mathbf{e}_{μ} , во-первых, ортогональны

$$(\mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu}) = 0, \text{ если } \mu \neq \nu, \quad (3)$$

и, во-вторых, нормированы

$$\mathbf{e}_\mu^2 = 1. \quad (4)$$

Взяты совместно условия (3) и (4) образуют условие ортонормированности

$$(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = \delta_{\mu\nu}, \quad (5)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ – символ Кронекера

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \nu \\ 0, & \text{если } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Соотношение (2) может быть описано следующим образом

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad (6)$$

здесь суммирование подразумевается по «немым» индексам μ и ν , причём

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

Стало быть,

$$ds^2 = \sum_{\mu} (dx_{\mu})^2, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

Такая форма получается в том случае, если прямолинейные оси характеризуются ортонормированными с помощью условия (5) единичными векторами \mathbf{e}_μ .

Приведенная форма ds^2 характеризуется нормальной гиперболической сигнатурой. Она соответствует выбору системы прямолинейных осей, характеризуемых единичными векторами \mathbf{e}_μ , если данные единичные векторы \mathbf{e}_μ ортогональны и нормированы с помощью условий:

$$\mathbf{e}_p^2 = 1, \quad \mathbf{e}_4^2 = -1, \quad p = 1, 2, 3.$$

Эти условия могут быть объединены в одной формуле

$$(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu},$$

где

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Форма (7) получается из общего выражения (6), если положить

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (8)$$

Из соотношения (8) вытекают следующие условия ортонормированности

$$g_{pq} = \delta_{pq}, \quad g_{p4} = 0 \quad \text{и} \quad g_{44} = -1.$$

Данные условия позволяют уравнения Максвелла

$$[\nabla \mathbf{H}] - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \boldsymbol{\delta}, \quad \nabla \mathbf{D} = \rho, \quad (A)$$

$$[\nabla \mathbf{E}] + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0 \quad (B)$$

записать в четырёхмерном виде, если воспользоваться следующими обозначениями производных координат четырёхмерного пространства

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \quad (p = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{1}{jc} \frac{\partial}{\partial t}$$

и ввести четырёхмерный вектор плотности тока, компоненты которого равны

$$\delta_\mu = (\boldsymbol{\delta}, jc\rho).$$

Система уравнений Максвелла переписывается в виде

$$\frac{\partial H_q}{\partial x_p} - \frac{\partial H_p}{\partial x_q} - j\epsilon \frac{\partial D_r}{\partial x_4} = \delta_r, \quad j\epsilon \sum_r \frac{\partial D_r}{\partial x_r} = \delta_4, \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_q}{\partial x_p} - \frac{\partial E_p}{\partial x_q} + j\epsilon \frac{\partial B_r}{\partial x_4} = 0, \quad -j\epsilon \sum_r \frac{\partial B_r}{\partial x_r} = 0, \quad (10)$$

где $p, q, r = 1, 2, 3$, причём в первых уравнениях как одной (9), так и другой (10) группы индексы p, q, r образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3.

Для расчета магнитных полей как в областях занятых, так и в областях не занятых током (то есть в условиях магнитостатики) широко используется векторный потенциал магнитного поля. Это векторная величина, плавно изменяющаяся от точки к точке. Его ротор равен вектору магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (11)$$

Представление вектора магнитной индукции в виде ротора от вектора-потенциала основывается на том, что дивергенция любого ротора тождественно равна нулю. Так как в соответствии с дифференциальной формой записи принципа непрерывности магнитного потока

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (12)$$

то подстановка в равенство (12) $\text{rot} \mathbf{A}$ вместо вектора \mathbf{B} дает выражение тождественно равное нулю: $\text{div} \text{rot} \mathbf{A} = 0$.

Электромагнитные поля \mathbf{E} и \mathbf{B} описываются четырёхмерным потенциалом A_μ , $\mu = 1, 2, 3, 4$, причём

$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$ – векторный потенциал, $A_4 = \frac{j\phi}{c}$ – скалярный потенциал поля [2].

Связь между векторами \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{A} , ϕ определяемая формулой (11) и получаемым

из второго уравнения Максвелла выражением

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi,$$

принимает в четырёхмерной записи вид

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

где $F_{\mu\nu}$ – четырёхтензор электромагнитного поля, сокращённая запись которого описывается выражением:

$$F_{\mu\nu} = \left(\mathbf{B}, -\frac{j}{c} \mathbf{E} \right). \quad (13)$$

В электротехнических расчетах векторный потенциал может быть использован для определения вектора \mathbf{B} магнитной индукции (11) или магнитного потока Φ . Вектор \mathbf{H} напряженности магнитного поля в однородной среде также принято определять через векторный потенциал.

В соответствии с основными уравнениями магнитостатики, то есть когда $\text{rot} \mathbf{H} = 0$ и, полагая $\mu_a = \text{const}$ во всей области магнитного поля, связь между векторами \mathbf{J} и \mathbf{B} может быть выражена уравнением

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_a \text{rot} \mathbf{H} + \mu_a \text{rot} \mathbf{J} = \mu_a \text{rot} \mathbf{J}.$$

Так как вектор \mathbf{B} может быть выражен через векторный потенциал (11), то

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_a\operatorname{rot}\mathbf{J}. \quad (14)$$

Векторный потенциал \mathbf{A} является вспомогательной функцией, введенной с целью упрощения расчета, поэтому в магнитном поле постоянного магнита ее можно подчинить требованию $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ [3]. Данное требование означает, что линии вектора \mathbf{A} есть замкнутые сами на себя линии. С учетом того, что $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ уравнение (14) приобретает вид

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_a\operatorname{rot}\mathbf{J}. \quad (15)$$

$$\int_V \left(\frac{1}{r} \nabla^2 \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla^2 \frac{1}{r} \right) dV = \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{d\mathbf{A}}{dn} - \mathbf{A} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) dS, \quad (16)$$

здесь r означает расстояние произвольной точки поля от точки P , в которой ищется векторный потенциал.

Так как в соответствии с правилами операций дифференцирования векторного анализа [4]

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}_0}{r^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

и

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3} \operatorname{div}\mathbf{r} + \operatorname{rgrad} \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_0}{r^4} = 0. \quad (17)$$

Принимая во внимание уравнение Пуассона (15) и уравнение (17), формулу Грина можно представить выражением

$$-\int_V \frac{\mu_a \operatorname{rot}\mathbf{J}}{r} = \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{d\mathbf{A}}{dn} - \mathbf{A} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) dS. \quad (18)$$

В рассматриваемом объеме V , включающем в себе точку P , в которой определяется векторный потенциал, и ограниченном поверхностью S , вектор \mathbf{A} и его производные являются непрерывными функциями точки [5]. А вот

Выражение (15) представляет собой уравнение Пуассона. Для получения общего решения данного уравнения необходимо воспользоваться теоремой Грина, применимой к конечной области V , ограниченной поверхностью S . Причем в формуле данной теоремы необходимо использовать векторный градиент функции \mathbf{A}

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \operatorname{div}\mathbf{r} + \operatorname{rgrad} \frac{1}{r^3},$$

а также учитывая, что

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r^3} = \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \mathbf{r}_0 = -\frac{3}{r^4} \mathbf{r}_0,$$

а также $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$,

поэтому

скаляр $\frac{1}{r}$ и его производные конечны и непрерывны во всем пространстве, кроме точки P . Теорема Грина может быть использована к участкам пространства, где \mathbf{A} и $\frac{1}{r}$, и их производные непрерывны.

Поэтому из объема V интегрирования следует исключить точку P , заключив ее в сферу S_0 произвольно малого радиуса, и применить формулу (18) к объему V' , заключенному между внешней поверхностью S и поверхностью сферы S_0 .

Нормаль к поверхности сферы S_0 , направленная к ее центру, прямо противоположна радиусу – вектору \mathbf{r} и является внешней по отношению к объему интегрирования. Поэтому на поверхности S_0

$$\frac{d1}{dnr} = -\frac{d1}{dr} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} \quad (19)$$

$$\oint_{S_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{A}}{dn} - \mathbf{A} \frac{d1}{dnr} \right\} d\mathbf{S} = \oint_{S_0} \left\{ -\frac{1}{r_0} \frac{d\mathbf{A}}{dr} - \frac{\mathbf{A}}{r_0^2} \right\} d\mathbf{S} = \left\{ -\frac{1}{r_0} \left(\frac{d\bar{\mathbf{A}}}{dr} \right) - \frac{1}{r_0^2} \bar{\mathbf{A}} \right\} \oint_{S_0} d\mathbf{S}, \quad (21)$$

где $\bar{\mathbf{A}}$ и $\left(\frac{d\bar{\mathbf{A}}}{dr} \right)$ некоторые средние значения вектора \mathbf{A} и его производной $\frac{d\mathbf{A}}{dr}$ на поверхности сферы S_0 .

Интеграл $\oint_{S_0} d\mathbf{S}$ равен общей поверхности сферы $S_0 = 4\pi r_0^2$, потому правая часть уравнения (21) имеет вид

$$-4\pi r_0 \left(\frac{d\bar{\mathbf{A}}}{dr} \right) - 4\pi \bar{\mathbf{A}}. \quad (22)$$

или

$$-\int_V \frac{\mu_a \text{rot} \mathbf{J}}{r} = -4\pi \mathbf{A} + \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{d\mathbf{A}}{dn} - \mathbf{A} \frac{d1}{dnr} \right) d\mathbf{S},$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu_a \text{rot} \mathbf{J}}{r} - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{d\mathbf{A}}{dn} - \mathbf{A} \frac{d1}{dnr} \right) d\mathbf{S}, \quad (23)$$

где объемный интеграл может быть распространен на весь ограниченный поверхностью S объем, так как при $r_0 \rightarrow 0$ область V' интегрирования стремится к объему V , а подынтегральное выражение остается конечным и при $r = 0$.

и

$$\frac{d\mathbf{A}}{dn} = -\frac{d\mathbf{A}}{dr}. \quad (20)$$

Если распространить поверхностный интеграл формулы теоремы Грина по поверхности S_0 , внося в него полученные в уравнениях (19) и (20) значения и применив теорему о среднем интегрального исчисления, получим

Если теперь устремить к нулю радиус r_0 , стягивая сферу S_0 в точку P , то первый член выражения (22) обратится в нуль, а среднее значение вектора-потенциала \mathbf{A} на поверхности бесконечно малой сферы может быть принят равным значению вектора \mathbf{A} в ее центре P .

Следовательно,

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_{S_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{A}}{dn} - \mathbf{A} \frac{d1}{dnr} \right\} d\mathbf{S} = -4\pi \mathbf{A}.$$

Таким образом, в пределе при $r_0 \rightarrow 0$ уравнение (18) принимает вид

этого вектора и его первых производных на граничной поверхности этого объема.

Если под объемом интегрирования понимать все бесконечное пространство (то есть удалить ограничивающую V поверхность S в бесконечность) и наложить на \mathbf{A} и его первые производные следующие граничные условия: в бесконечности \mathbf{A} стремится к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{r}$, а его первые производные по координатам не медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$, то есть $r\mathbf{A}$ и $r^2 \frac{d\mathbf{A}}{dn}$ при $r_0 \rightarrow 0$ остаются конечными, то интеграл по граничной поверхности станет равным нулю.

Таким образом

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu_a \text{rot} \mathbf{J}}{r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot} \mathbf{J}}{r} dV,$$

Следовательно, индукция магнитного поля, создаваемого намагниченным телом, убывает не медленнее, чем $\frac{1}{r^3}$ и определяется его намагниченностью геометрическими параметрами данного тела.

Компоненты электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{B} являются компонентами четырёхтензора (13), следовательно,

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + VB'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - VB'_y)$$

и

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right), \quad B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right) \quad (25).$$

Выводы. При переходе от инерциальной системы отсчёта, связанной с

следовательно

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \text{rot} \left(\frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot} \mathbf{J}}{r} dV \right).$$

В соответствии с формулами векторного анализа

$$\int_V \frac{\text{rot} \mathbf{J}}{r} dV = - \int_V \frac{[\mathbf{J}r]}{r^3} dV,$$

поэтому

$$\mathbf{B} = - \text{rot} \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{J}r]}{r^3} dV = - \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \text{rot} \frac{[\mathbf{J}r]}{r^3} dV.$$

Учитывая, что [4]

$$\text{rot} [\mathbf{J}r]^n = (\mathbf{J}n + 2)r^{n-1} - (\mathbf{J}r)nr^{n-2},$$

стало быть,

$$\mathbf{B} = - \frac{\mu}{4\pi} \int_V \text{rot} \frac{[\mathbf{J}r]}{r^3} dV = - \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left(- \frac{\mathbf{J}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{J}r)}{r^5} \right) dV. \quad (24)$$

компоненты трёхмерных векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} преобразуются по правилу преобразования компонент четырёхтензора. Формула преобразования для компонент тензора $F_{\mu\nu}$ имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} F'_{\lambda\sigma}.$$

Стало быть,

транспортным средством, к инерциальной системе отсчёта, расположенной на

железнодорожном полотне, все векторы электромагнитного поля меняют свою величину и направление. Неизменными остаются только «продольные компоненты» то есть компоненты по направлению относительного движения.

Установленные аналитические зависимости (24) и (25) могут быть

использованы на железнодорожном транспорте, в промышленности при разработке устройств дефектоскопии и идентификации, автоматической локомотивной сигнализации с целью повышения эффективности их функционирования.

Список литературы

1. Тоннела, М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности [Текст] / М.-А. Тоннела. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 483 с.
2. Меерович, Э.А. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике и электрофизике [Текст] / Э.А. Меерович, Б.Э. Мейерович. – М.: Энергоатомиздат. 1987. – 232 с.
3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле [Текст] / Л.А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.
4. Маделунг, Э. Математический аппарат физики [Текст] / Э. Маделунг. – М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1960. – 618 с.
5. Тамм, И.Е. Основы теории электричества [Текст] / И.Е. Тамм. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2003. – 616 с.

Ключевые слова: релятивистская электродинамика, векторный потенциал, формула теоремы Грина, уравнение Пуассона, четырёхтензор.

Аннотации

Показано, що електромагнітні процеси систем залізничного транспорту слід розглядати на основі законів релятивістської електродинаміки, для розрахунку параметрів магнітного поля рейкових ниток використаний векторний потенціал, описаний рівнянням Пуассона, рішення якого здійснено за допомогою формули теореми Гріна, встановлено аналітичну залежність магнітних параметрів намагніченого тіла від його геометричних розмірів і намагніченості, а також їх вплив на вектори електромагнітного поля.

Показано, что электромагнитные процессы систем железнодорожного транспорта следует рассматривать на основе законов релятивистской электродинамики, для расчёта параметров магнитного поля рельсовых нитей использован векторный потенциал, описанный уравнением Пуассона, решение которого осуществлено с помощью формулы теоремы Грина, установлена аналитическая зависимость магнитных параметров намагниченого тела от его геометрических размеров и намагниченности, а также их влияние на векторы электромагнитного поля.

It is shown, that it is necessary to examine the electromagnetic processes of the systems of railway transport on the basis of laws of relativism electrodynamics, for the calculation of parameters of the magnetic field of rail filaments the vectorial potential, described by the Puasson equalization the decision of which is carried out by the formula of the Grin theorem, is used, analytical dependence of magnetic parameters of the magnetized body on his geometrical sizes and magnetized is set, and also their influence on the vectors of the electromagnetic field.