УДК 625.03 DOI: https://doi.org/10.18664/1994-7852.174.2017.127629

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ КОЛІЇ ТА РУХОМОГО СКЛАДУ ПРИ ДИСКРЕТНІЙ ПІДРЕЙКОВІЙ ОСНОВІ В ЗОНІ РЕЙКОВИХ СТИКІВ

Д-р техн. наук І. Е. Мартинов, кандидати техн. наук Н. В. Бугаєць, А. В. Клименко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПУТИ И ПОДВИЖНОГО СОСТАВА ПРИ ДИСКРЕТНОМ ПОДРЕЛЬСОВОМ ОСНОВАНИИ В ЗОНЕ РЕЛЬСОВЫХ СТЫКОВ

Д-р техн. наук И. Э. Мартынов, кандидаты техн. наук Н. В. Бугаец, А. В. Клименко

SIMULATION OF INTERACTION OF THE WAY AND MOBILE COMPOSITION UNDER A DISCRETE SUB-FRAMEWORK BASIS IN THE AREA OF RAIL JOBS

Dr. sc. sciences I. E. Martynov, phd. tehn. N. V. Bugaets, A. V. Klymenko

Розроблено математичну модель для оцінювання напруженого стану рейок у зоні рейкових стиків. За розрахункову схему залізничної колії прийнято балку на окремих дискретних пружно-дисипативних опорах з нелінійними характеристиками. Запропонована модель дає змогу визначити рівень вертикальних динамічних сил взаємодії рухомого складу і колії в зоні стиків унаслідок зміни жорсткості рейкової нитки в цій зоні.

Ключові слова: *жорсткість, рейка, стик, шпала, взаємодія.*

Разработана математическая модель для оценки напряженного состояния рельсов в зоне рельсовых стыков. В качестве расчетной схемы железнодорожного пути в работе принята балка на отдельных дискретных упруго-диссипативных опорах с нелинейными характеристиками. Предложенная модель позволяет определить уровень вертикальных

динамических сил взаимодействия подвижного состава и железнодорожного пути в зоне стыка вследствие изменения жесткости рельсовой нити в этой зоне.

***Ключевые слова**: жесткость, рельс, стык, шпала, взаимодействие.*

A mathematical model is developed for estimating the stress state of rails in the zone of rail joints. As a design scheme of the railway track, a beam is adopted in the work on discrete elastically dissipative supports with nonlinear characteristics, which makes it possible to take into account the effect of changes in the flexural rigidity of the rails on the interaction of the rolling stock and the entire structure of the upper structure of the track. The proposed model makes it possible to determine the level of the vertical dynamic forces of interaction between the rolling stock and the path in the junction zone, due to a change in the flexural rigidity of the rail thread in this zone. The obtained results can be used for a reliable assessment of the possibility of introducing new railway track structures and new types of rolling stock.

***Keywords:** rigidity, rail, joint, sleepers, interaction.*

Вступ. Дослідження роботи залізничної колії під дією навантаження від рухомого складу числовими методами дає змогу отримувати інформацію про особливості впливу на колію та особливості напружено-деформованого стану всієї конструкції в різних умовах експлуатації при значно менших матеріальних і фінансових витратах у порівнянні з експериментальними методами. Числові методи так само дають можливість точно визначати вихідні розрахункові дані, що практично неможливо при проведенні експериментальних робіт.

Однак застосовувати числові методи можливо тільки тоді, коли математичні моделі адекватно відображають реальну роботу як динамічної системи «екіпаж-колія», так і конструкцію колії. Це повною мірою стосується моделювання взаємодій колії та рухомого складу в зонах рейкових стиків, оскільки теоретичні та експериментальні дослідження показали, що рівень динамічної дії на колію в стиках зростає в 1,5–2 рази. Отже, моделювання роботи рейкової нитки під дією вертикального навантаження в зоні стику є актуальним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні найбільш вживаною є модель колії, при якій рейки подані у вигляді балок нескінченної довжини, що спираються на суцільну пружну основу. На підставі теоретичних досліджень Е. М. Бромберга, М. Ф. Вериго, А. Я. Когана, Г. М. Шахунянца [1–4] та інших учених розроблені математичні моделі взаємодії колії та рухомого складу, напружено-деформованого стану колії, які базуються на цій розрахунковій схемі. Численні експериментальні дослідження показали, що для умов магістральних залізниць теоретичні й експериментальні результати мають хорошу збіжність.

Однак низка учених (К. Д. Бєлих [5], Н. С. Нікеров [6] та ін.) вважають, що для умов промислових залізниць така розрахункова схема надмірно ідеалізує колію та її технічний стан. В. В. Рибкін, розраховуючи колію як балку на багатьох пружних опорах зі змінними характеристиками жорсткості під дією статичного навантаження, показав, що застосування методів пружної основи дає занижені на 17–24 % результати [7, 15].

У роботі [8] наведено математичні моделі динамічної системи «екіпаж - колія», в основі яких прийнята розрахункова схема колії як балки на багатьох пружно-дисипативних опорах з нелінійними характеристиками. Реалізація цих моделей у програмній системі Mathcad дає змогу визначати просторові сили впливів екіпажів на колію в умовах промислового транспорту. Однак робота колії в зоні рейкових стиків в цій роботі не розглядалася.

Визначення мети та завдання дослідження. Метою статті є розроблення адекватної, з точки зору реальних процесів взаємодії динамічної системи «екіпаж - колія», математичної моделі роботи рейок у зоні стику під дією вертикальних динамічних сил від рухомого складу. Для досягнення поставленої мети було вирішене завдання з визначення зміни жорсткості рейкової нитки в специфічній зоні рейкового стику.

Основна частина дослідження. У працях [8, 13, 14] вертикальні сили взаємодії екіпажа і колії з використанням припущень про пружно-дисипативні характеристики колії були визначені як

$$R_i = C_в\left(y_p\right) + \beta_в\left(\dot{y}_p\right)\cdot sign\,\dot{y}_p\ ,$$

де $C_в$ – приведена вертикальна жорсткість рейкової нитки в точці контакту, Н/м;

y_p – вертикальний вигин рейки під колесом, м;

$\beta_в$ – параметр розсіювання енергії конструкцією колії у вертикальній площині, $\left(\frac{H\cdot c^2}{м}\right)$.

Перший доданок у правій частині цієї формули є пружною складовою – дисипативною складовою вертикальних сил взаємодії. Тоді цю формулу можна записати у такому вигляді:

$$R = R_{уп} + R_{дис}\ . \qquad (2)$$

Далі, на початковому етапі, розглядалася робота колії під дією тільки пружної складової $R_{уп}$:

$$R = R_{уп} = C_в(y_p)\ . \qquad (3)$$

Величина приведеної вертикальної жорсткості до точки контакту колеса і рейки (згідно з рис. 1), яка необхідна для подальших розрахунків, була визначена таким чином. При цьому наголошується, що ця величина є змінною в процесі руху екіпажа, нелінійною та залежною як від жорсткості всіх рейкових опор, так і від місця розташування колеса щодо цих опор.

$$C_в = \frac{1}{y_{едр}}, \qquad (4)$$

де $y_{едр}$ – прогин рейкової нитки під дією одиничної сили $R_{едуп}$=1.

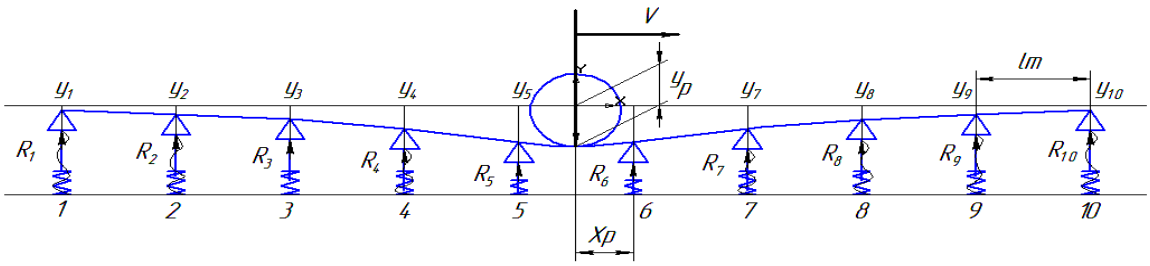

Рис. 1. Розрахункова схема рейкової нитки на пружних опорах під дією рухомої сили

Величину прогину рейкової нитки під дією одиничної сили можна визначити як

$$y_{ед\,р} = y_5\frac{x_p}{\lambda_ш} + y_6\frac{\left(\lambda_ш - x_p\right)}{\lambda_ш} + \frac{\left(\lambda_ш - x_p\right)^2 x_p^{\ 2}}{3EI\,\lambda_ш}, \qquad (5)$$

де y_i – пружні осідання рейкових опор;

$\lambda_ш$ – відстань між опорами;

x_p – відстань від найближчої опори до точки прикладання сили $R_{едуп}$:

$$X_p = \lambda_ш\left(1 - \left\{\frac{x_{ni}}{\lambda_ш}\right\}\right), \qquad (6)$$

де $\lambda_ш$ – відстань між опорами, м;

$\left\{\frac{X_{ni}}{\lambda_ш}\right\}$ – дробова частина співвідношення $\frac{X_{ni}}{\lambda_ш}$;

X_{ni} – поточна абсциса кожної пари, м.

Пружні осідання рейкових опор були визначені з використанням рівнянь п'яти моментів як

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(M_2 - 2M_1\right)\\
y_2 &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(M_3 - 2M_2 + M_1\right)\\
y_3 &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(M_4 - 2M_3 + M_2\right)\\
y_4 &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(M_5 - 2M_4 + M_3\right)\\
y_5 &= \frac{1}{c\lambda_ш}\left[\left(\lambda_ш - x_p\right)R_{уп} + M_6 - 2M_5 + M_4\right]\\
y_6 &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(x_p R_{уп} + M_7 - 2M_6 + M_5\right)\\
y_7 &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(M_8 - 2M_7 + M_6\right)\\
y_8 &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(M_9 - 2M_8 + M_2\right)\\
y_9 &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(M_{10} - 2M_9 + M_8\right)\\
y_{10} &= \frac{1}{c\cdot\lambda_ш}\left(-2M_{10} + M_9\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Невідомі опорні моменти M_i визначалися в матричній формі з використанням рівнянь Крамера у такому вигляді:

$$\mathrm{M_i} = \frac{\tilde{\Delta}_j}{\Delta_j}\cdot \mathrm{R_{едуп}}, \qquad (8)$$

де Δ_j – визначник матриці відносних жорсткостей рейок і рейкових опор;

$\tilde{\Delta}_j$ – визначник матриці вільних членів системи рівнянь п'яти моментів.

Для розрахункової схеми, наведеної на рис. 1, матриця жорсткостей отримана у такому вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 4+6\alpha & 1-4\alpha & .\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha. & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Розв’язуючи задачу про взаємодію екіпажа та колії методом Рунге - Кутта в кожній точці інтегрування загальної системи рівнянь, розраховувалися невідомі опорні моменти для загальної розрахункової схеми (рис. 1). Далі визначалися пружні прогини рейкової нитки в точці контакту колеса й рейки і таким чином визначалася приведена жорсткість рейкової нитки.

Якщо визначити в числовому вигляді значення швидкостей деформацій усіх рейкових опор, можна розрахувати також наведений коефіцієнт дисипації колії, який, як і жорсткість, є змінним у процесі руху і нелінійним.

Матриця жорсткостей рейкової нитки (9), складена для розрахункової схеми (рис. 1), отримана з умови постійної жорсткості рейки у всіх прольотах. Однак у зоні рейкового стику жорсткість рейкової нитки буде іншою. На цей параметр будуть впливати значення сумарної жорсткості стикових накладок, рівень натягу стикових болтів, наявність стикового зазора.

Для урахування такої особливості будови колії розглянемо роботу рейкової нитки при наявності рейкового стику при дії вертикальної сили. Оскільки зміна згинальної жорсткості рейки впливає на приведену у точці контакту вертикальну жорсткість залежно від відстані точки контакту до стику, необхідно розглянути декілька розрахункових схем. У першому випадку вертикальна сила перебуває в п'ятому прольоті від стику.

Розрахункова схема в цьому випадку буде мати вигляд (рис. 2).

Рис. 2. Розрахункова схема першого варіанта навантаження

Запишемо рівняння п'яти моментів для кожної з десяти опор:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{для 1-ї опори: } M_1(4+6\alpha)+M_2(1-4\alpha)+M_3\alpha+0...=0\\
&\text{для 2-ї опори: } M_1(1-4\alpha)+M_2(4+6\alpha)+M_3(1-4\alpha)+M_y\alpha+0...=0\\
&\text{для 3-ї опори: } M_1\alpha+M_2(1-4\alpha)+M_3(4+6\alpha)+M_4(1-4\alpha)+M_5\cdot\alpha+0...=0\\
&\text{для 4-ї опори: } 0+M_2\alpha+M_3(1-4\alpha)+M_4(4+6\alpha)+M_5(1-4\alpha)+M_6\alpha+0...=0\\
&\text{для 5-ї опори:}\\
&\qquad ...0+M_3\alpha+M_4(1-4\alpha)+M_5(4+6\alpha)+M_6(1-4\alpha)+M_7\alpha+0...=\\
&\qquad =-\frac{R_{yni}}{\lambda_ш^2}x_p(\lambda_ш-x_p)\cdot x_p(2\lambda_ш-x_{pi})+R_{yni}\left[2\alpha x_{pi}-\alpha(\lambda_ш-x_{pi})\right]\\
&\text{для 6-ї опори:}\\
&\qquad 0+M_4\alpha+M_5(1-4\alpha)+M_6(4+6\alpha)+M_7(1-4\alpha)+M_8\alpha+0...=\\
&\qquad =-\frac{R_{yni}}{\lambda_ш^2}(\lambda_ш-x_{pi})\cdot x_{pi}(2\lambda_ш-x_{pi})+R_{yni}\left[2\alpha(\lambda_ш-x_{pi})-\alpha x_{pi}\right]\\
&\text{для 7-ї опори:}\\
&\qquad ...0+M_5\alpha+M_6(1-4\alpha)+M_7(4+6\alpha)+M_8(1-4\alpha)+M_9\alpha+0...=0\\
&\text{для 8-ї опори: } ...0+M_6\alpha+M_7(1-4\alpha)+M_8(4+6\alpha)+M_9(1-4\alpha)+M_0\alpha_{st}=0\\
&\text{для 9-ї опори: } ...0+M_7\alpha+M_8(1-4\alpha)+M_9(4+6\alpha)+M_{10}(1-4\alpha_{st})=0\\
&\text{для 10-ї опори: } ...0+M_8\alpha+M_9(1-4\alpha)+M_{10}(4+6\alpha_{st})=0
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

У цьому випадку матриця жорсткостей матиме такий вигляд:

$$A_2=\begin{pmatrix}
4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\alpha & 1+4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha. & \alpha & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha_{st}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha_{st}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha_{st}
\end{pmatrix}. \quad (11)$$

У цих формулах α_{st} – коефіцієнт відносної жорсткості рейки і рейкової опори в зоні стикового прольоту:

$$\alpha_{st}=\frac{6EI_{st}}{l_s^3C_y}\ , \quad (12)$$

де E – модуль пружності рейкової сталі;

I_{st} – момент інерції рейки при вертикальному вигині в стиковому прольоті з урахуванням роботи накладок;

C_y – вертикальна жорсткість рейкової опори;

l_{st} – відстані між опорами в стиковому прольоті.

Далі вертикальна сила перебуває в четвертому прольоті від стику (рис. 3). Рівняння п'яти моментів для кожної з десяти опор матимуть такийвигляд:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{для 1-ї опори: } M_1(4+6\alpha)+M_2(1-4\alpha)+M_3\alpha+0...=0\\
&\text{для 2-ї опори: } M_1(1-4\alpha)+M_2(4+6\alpha)+M_3(1-4\alpha)+M_y\alpha+0...=0\\
&\text{для 3-ї опори: } M_1\alpha+M_2(1-4\alpha)+M_3(4+6\alpha)+M_4(1-4\alpha)+M_5\cdot\alpha+0...=0\\
&\text{для 4-ї опори: } 0+M_2\alpha+M_3(1-4\alpha)+M_4(4+6\alpha)+M_5(1-4\alpha)+M_6\alpha+0...=0\\
&\text{для 5-ї опори:}\\
&\qquad ...0+M_3\alpha+M_4(1-4\alpha)+M_5(4+6\alpha)+M_6(1-4\alpha)+M_7\alpha+0...=\\
&\qquad =-\frac{R_{yni}}{\lambda_{ш}^2}x_p(\lambda_{ш}-x_p)\cdot x_p(2\lambda_{ш}-x_{pi})+R_{yni}\left[2\alpha x_{pi}-\alpha(\lambda_{ш}-x_{pi})\right]\\
&\text{для 6-ї опори:}\\
&\qquad 0+M_4\alpha+M_5(1-4\alpha)+M_6(4+6\alpha)+M_7(1-4\alpha)+M_8\alpha+0...=\\
&\qquad =-\frac{R_{yni}}{\lambda_{ш}^2}(\lambda_{ш}-x_{pi})\cdot x_{pi}(2\lambda_{ш}-x_{pi})+R_{yni}\left[2\alpha(\lambda_{ш}-x_{pi})-\alpha x_{pi}\right]\\
&\text{для 7-ї опори:}...0+M_5\alpha+M_6(1-4\alpha)+M_7(4+6\alpha)+M_8(1-4\alpha)+M_9\alpha_{st}+0...=0\\
&\text{для 8-ї опори: }...0+M_6\alpha+M_7(1-4\alpha)+M_8(4+6\alpha)+M_9(1-4\alpha_{st})+M_0\alpha_{st}=0\\
&\text{для 9-ї опори: }...0+M_7\alpha+M_8(1-4\alpha)+M_9(4+6\alpha_{st})+M_{10}(1-4\alpha_{st})=0\\
&\text{для 10-ї опори: }...0+M_8\alpha+M_9(1-4\alpha_{st})+M_{10}(4+6\alpha_{st})=0
\end{aligned}
\right\}
\qquad (13)
$$

Рис. 3. Розрахункова схема другого варіанта навантаження

У цьому випадку матриця жорсткостей буде такою:

$$
A_3=\begin{pmatrix}
4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\alpha & 1+4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha. & \alpha_{st} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha_{st} & \alpha_{st}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha_{st}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha_{st}
\end{pmatrix}. \qquad (14)
$$

Тут усі позначення попередні.

Отже, у міру наближення колеса до стикового прольоту матриці жорсткостей будуть змінюватися таким чином:

- колесо перебуває в третьому прольоті від стику:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha_{st} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha_{st} & \alpha_{st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha_{st} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha \end{pmatrix}. \quad (15)$$

- у другому прольоті:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha_{st} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha_{st} & \alpha_{st} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha_{st} & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{st} & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha & 1-4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{st} & 1-4\alpha & 4+6\alpha \end{pmatrix}. \quad (16)$$

- у першому прольоті:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha_{st} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha_{st} & \alpha_{st} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha_{st} & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha. & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{st} & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{st} & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha \end{pmatrix}. \quad (17)$$

- колесо перебуває в стиковому прольоті:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha_{st} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha_{st} & \alpha_{st} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha_{st} & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{st} & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha & 1-4\alpha. & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{st} & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Далі, у міру віддалення від стикового прольоту, матриці будуть симетрично змінюватися у зворотний бік.

Складаючи визначники матриці жорсткості і визначники матриці зовнішнього завантаження, поодинокі опорні моменти розраховуємо за формулою

$$M_i = \frac{\Delta_j}{\Delta}. \quad (19)$$

Знаючи поодинокі опорні моменти, розраховуються пружні поодинокі прогини опор (система рівнянь (7)), поодинокі прогини в точці дії навантаження (формула (5)) і наведені вертикальні жорсткості рейкової нитки, які необхідно визначити. Ці значення використовуються в розрахунках вертикальних динамічних сил взаємодії за описаною вище методикою.

Висновки. Отже, розроблена математична модель дає змогу визначити наведену до точки контакту колеса і рейки жорсткість рейкової нитки, що дає можливість визначати вертикальні динамічні сили взаємодії колії та рухомого складу з урахуванням змін параметрів згинальної жорсткості рейкової нитки в зоні стику.

Потрібно зазначити, що вплив цих параметрів на сили взаємодії безперервно змінюється в процесі руху, нелінійно залежить як від жорсткості рейкових опор, так і від жорсткості рейок поза стиком і в зоні рейкового стику.

Список використаних джерел

1. Бесстыковой путь [Текст] / В. Г. Альбрехт, Е. М. Бромберг, Н. Б. Зверев [и др.]. – М.: Транспорт, 1982. – 206 с.

2. Даніленко, Е. І. Залізнична колія [Текст] : підруч. для вищих навчальних закладів / Е. І. Даніленко. – К. : Інпрес, 2010. – Т. 2. – 456 с.

3. Даніленко, Е. І. Правила розрахунків залізничної колії на міцність і стійкість [Текст] : ЦП-0117 / Е. І. Даніленко, В. В. Рябкін. – К. : Транспорт України, 2006. – 168 с.

4. Бромберг, Е. М. Взаимодействие пути и подвижного состава [Текст] / Е. М. Бромберг, М. Ф. Вериго, В. Н, Данилов; под ред. М. А. Фишмана. – М.: Трансжелдориздат, 1956. – 280 с.

5. A mathematical model of the rail track presented as a bar on elastic and dissipative supports under the influence of moving loads [Text] / A. Darenskiy, V. Vitolberg, D. Fast, A. Klymenko, Yar. Leibuk // MATEC Web of Conferences. – EDP Sciences, 2017. – 116 p.

6. Шахунянц, Г. М. Железнодорожный путь [Текст]: монография / Г. М. Шахунянц. – М.: Транспорт, 1987. – 497 с.

7. Railway construction [Text] / Sz. Fisher, B. Eller, Z. Kada, A. Németh // Universitas-Győr Nonprofit Kft., Győr, 2015. – 334 p.

7. Вериго, М. Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава [Текст] / М. Ф. Вериго, А. Я. Коган. – М.: Транспорт, 1986. – 589 с.

8. Белых, К. Д. О нагрузках от колес при расчете железнодорожного пути [Текст] / К. Д. Белых, М. К. Уманов, Г. Н. Малышко // Металлургическая промышленность. – 1976. – №5 – С. 78-79.

9. Даренський, О. М. Аналіз розвитку теорій розрахунків залізничних колій [Текст] / О. М. Даренський, Е. А. Бєліков // Зб. наук. праць Укр. держ. акад. залізнич. трансп. – Харків : УкрДАЗТ, 2015. – Вип. 154. – С. 149-155.

10. Нисиров, Н. С. Исследования сил взаимодействия рельсовых нитей и подрельсовых шпальных оснований [Текст] / Н. С. Нисиров // Труды ЛИИЖТ. – Л.: Транспорт, 1977. – № 416. – С. 26-35.

11. Климов, В. И. Исследование влияния нелинейных характеристик подрельсового основания пути [Текст] / В. И. Климов, В. В. Рыбкин // Труды ДИИТа. – Днепропетровск: ДИИТ, 1987. – №2 44/32. – С. 72-84.

12. Даренський, О. Н. Теоретичні та експериментальні дослідження роботи залізничних колій промислового транспорту [Текст] : монографія / О. М. Даренський. – Харків : УкрДАЗТ, 2011. – 204 с.

13. Клименко, Л. В. Расчет пути с учетом неравноупругости подрельсового основания [Текст] / Л. В. Клименко // Путь и путевое хозяйство. – 2005. – №6. – С. 34-35.

14. Даренський, О. М. Визначення приведеної вертикальної жорсткості рейкової нитки при використанні розрахункової схеми як балки на пружних опорах з випадковими характеристиками [Текст] / О. М. Даренський, Н. В. Бугаєць, В. Г. Вітольберг // Зб. наук. праць Укр. держ. акад. залізнич. трансп. – Харків : УкрДАЗТ, 2010. – Вип. 115. – С. 151-162.

15. Чихладзе, Е. Д. Будівельна механіка [Текст]: підруч. для студентів вищих навчальних закладів / Е. Д. Чихладзе. – Харків : УкрДАЗТ, 2002. – 305 с.

Мартинов Ігор Ернстович, д-р техн. наук, професор кафедри вагонів Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: (057) 730-10-35. E-mail: vagoni@kart.edu.ua.
Бугаєць Наталія Володимирівна, канд. техн. наук, доцент кафедри колії та колійного господарства Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: (057) 730-10-59. E-mail: natalia.bugaec@gmail.com.
Клименко Андрій Володимирович, канд. техн. наук, кафедра колії та колійного господарства Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: (057) 730-10-60. E-mail: klymenko@kart.edu.ua.

Igor Martynov, Dr. Sc. Science, Department of railway carriages Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: (057) 730-10-13. E-mail: info@kart.edu.ua.
Natalia Bugaets, PhD. Sc. Associate Professor, Department of Track and Track Facilities Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: (057) 730-10-59. E-mail: natalia.bugaec@gmail.com.
Andrii Klymenko, PhD. Sc. Department of Track and Track Facilities Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: (057) 730-10-60. E-mail: klymenko@kart.edu.ua.

Стаття прийнята 26.12.2017 р.