

УДК 534.131

**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ БАШТОВОЇ СПОРУДИ  
З ПРИЄДНАНИМ ГАСНИКОМ У РІВНОМІРНОМУ ВІТРОВОМУ ПОТОЦІ**

Д-р техн. наук В. Є. Волкова, старш. викл. І. В. Шаповал

**NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMIC BEHAVIOUR OF A TOWER STRUCTURE  
WITH AN ATTACHED DAMPER IN A UNIFORM WIND FLOW**

D. Sc. (Tech.) V. Volkova, Senior lecturer I. Shapoval

---

DOI: <https://doi.org/10.18664/1994-7852.186.2019.186175>

---

У статті досліджено динамічну поведінку баштової споруди як без приєднання гасника коливань, так і за його наявності. Виявлено істотний вплив початкових умов на динаміку досліджуваної системи. Чисельне моделювання дозволило отримати часові процеси, спектральні характеристики та побудувати фазові портрети коливань башти. Тестування моделі, перевірка стійкості і підбір параметрів провадилися на базі реалізації моделі засобами системи MatLab. Встановлено, що системи з двома ступенями свободи проявляють нові додаткові патерни фазових траєкторій з більш складною структурою.

**Ключові слова:** чисельне моделювання, динамічна поведінка, баштова споруда, динамічний гасник коливань (ДГК), вітровий потік, коливання, фазові траєкторії.

*The dynamic behaviour of a tower structure in uniform wind flow both with and without attached pendulum dampers studied in the article. The structural scheme of the tower structure is considered as cantilever rod having a variable cross-section. The base of the rod is rigidly clamped. Two pendulum dampers located in two mutually perpendicular planes are connected to the upper end of the rod. The pendulum damper structure represented by mass connected to the rod by means of elastic coupling and viscous friction damper. The mathematical model of the investigated system was described by system of two non-linear differential equations. The Voigt's hypothesis was adopted for internal inelastic impedance of the rod to simplify the analysis of the dynamic system under study. Such assumption is quite valid due to the small value of the internal resistance with respect to the values of aerodynamic force and viscous friction of the damper.*

*The problems of stability and accuracy in the application of numerical methods for solving non-linear systems of differential equations are at the higher interest for numerical modelling analyzing the peculiarities of the system. It does not make it possible to separate the equation of the system by using the classical method of reducing the order of the system and as a consequence to apply simpler calculation schemes. Model testing allowed us to establish an integration step that provided the necessary system resolution requirements and determined the acceptable ranges of system parameter values. The implementation of the model was carried out by means of the MatLab system. It has extensive possibilities of software tuning and modification of methods of numerical solution of differential equations systems of different types and visualization of results.*

*Numerical simulation made it possible to obtain time histories, spectral characteristics and construct phase portraits of tower oscillations. The analysis of parameter selection in order to prevent the resonance oscillations of the system in the first resonance was performed. The significant influence of initial conditions on the dynamic behaviour of investigated system was revealed. It is established that the phenomena inherent in a non-linear system with one degree of*

*freedom are preserved and for a system with two degrees of freedom. But, more complicated systems exhibit new additional patterns of phase trajectories with more complex structures.*

**Keywords:** numerical simulation, dynamic behavior, tower, pendulum damper, wind flow

**Вступ.** Явища, що спостерігаються при взаємодії споруд і їхніх окремих елементів з потоком повітря, дуже різноманітні. Найбільш відомими є вітровий резонанс, галопінг і бафтинг. Вони мають дуже складний характер і не всі до кінця досліджені. Традиційно припускають, що дія вітру є комбінацією середньосталого тиску і випадкових пульсацій, викликаних турбулентністю вітрового потоку. Така ідеалізація механізму взаємодії споруди з вітровим потоком дозволяє прогнозувати і дослідити основні аеродинамічні ефекти і не викликає додаткових обчислювальних труднощів.

Дана робота присвячена дослідженню динамічної поведінки баштової споруди з приєднаним гасником. Розрахункова схема баштової споруди розглядається у вигляді консольного стрижня, що має змінний поперечний переріз. Основу стрижня жорстко защемлено. До верхнього кінця стрижня приєднані два гасники коливань, розташованих у двох взаємно перпендикулярних площинах. Гасник коливань являє собою масу, приєдану до стрижня за допомогою пружного зв'язку і демпфера в'язкого тертя. Математична модель об'єкта досліджень – це система двох нелінійних диференціальних рівнянь. Для спрощення аналізу досліджуваної динамічної системи внутрішній непружний опір стрижня враховувався за гіпотезою Фойгта. Таке припущення цілком справедливе, зважаючи на малість величини внутрішнього опору відносно величин аеродинамічної сили і в'язкого опору гасника.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Конструкції і теорія лінійних гасників коливань добре відомі і широко представлені в літературних джерелах [1]. На жаль, такі пристрої використовуються для гасіння вимушених коливань тільки у

вузькому частотному діапазоні. Ефективність ДГК залежить від відношення його маси  $m$  до величини  $M$ , так званої головної маси, і підвищується. Нелінійні гасники коливань є ефективними в більшому частотному діапазоні [2-5]. Робота системи з таким гасником розглядається в роботі [6], де також представлені їхні різні конструкції. Віброударний гасник з одним ступенем свободи для гасіння вимушених коливань запропонований у роботі [7]. У статті [8] показано, що нелінійний гасник зменшує амплітуди коливань у широкому діапазоні частоти вимушених коливань. Процеси перекачування енергії до істотно нелінійного гасника досліджуються в роботі [9]. Динаміка систем з обмеженим збуренням у резонансі була вперше аналітично описана В. О. Кононєнком [11]. Пізніше дослідження динаміки неідеальних систем були викладені в різних публікаціях, зокрема в статтях [10, 12]. Відомо, що використання динамічних гасників коливань дозволяє істотно зменшити амплітуди резонансних коливань.

**Визначення мети та завдання дослідження.** Мета полягає в дослідженні динамічної поведінки баштової споруди за наявності динамічних гасників коливань маятникового типу. Для досягнення поставленої мети виконано такі завдання: розроблено чисельну модель баштової споруди, проведено тестування системи та перевірку її стійкості, досліджувався вплив окремих параметрів на динамічну поведінку баштової споруди.

**Основна частина дослідження.** Коливання стрижня з приєднаним маятниковим гасником у рівномірному вітровому потоці описуються системою диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \left(1 + \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \right] + m_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - q_x + \delta(x-l) m_1 \frac{\partial^2 (y + \omega_l)}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 (y + \omega_l)}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + f_0^2 y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

де  $m_x, EI_x, \gamma_0$  – погонна маса, згинальна жорсткість і коефіцієнт в'язкого опору стрижня;

$m_1, \mu, f_0$  – маса, коефіцієнт в'язкого опору і парціальна частота коливань маятничкового гасника;

$\omega, \omega_l$  – переміщення стрижня в довільному перерізі  $x$  і в перетині  $x = l$ ;

$y$  – відносне переміщення маятничкового гасника, що дорівнює подовженню його пружного зв'язку;

$q_x$  – аеродинамічна сила, що діє на стрижень;

$\delta(x-l)$  – дельта функція Дірака.

Величина аеродинамічної сили  $q_x$ , що входить до системи рівнянь (1), нелінійно залежить від швидкості вітрового потоку

$$q_x = 0.5 C_x \rho h_x V_x^2, \quad (2)$$

де  $\rho$  – густина повітря;

$h_x$  – поперечний розмір стрижня;

$V_x$  – величина швидкості вітрового потоку, що залежить від координати перетину стрижня  $x$ .

Величина коефіцієнта  $C_x$ , за експериментальними даними, залежить від форми поперечного перерізу стрижня і може бути подана у вигляді полінома

$$C_x = \sum_{j=1,3,\dots} (-1)^{(j-1)/2} A_j \left( \frac{\omega}{V_x} \right)^j. \quad (3)$$

У виразі (3) величина  $A_j$  характеризує форму поперечного перерізу стрижня. Обмежившись двома членами полінома (3), з рівняння (2) отримаємо

$$q_x = - \left[ A_1 \left( \frac{\omega}{V_x} \right) + A_3 \left( \frac{\omega}{V_x} \right)^3 \right] \rho h_x V_x^2 = -A_1 \omega \rho h_x V_x + A_3 \frac{\omega^3}{V_x} \rho h_x. \quad (4)$$

При галопуванні баштових споруд частота і форма коливань споруд близькі до частоти і форми коливань основного тону. Тому найбільш цікавими є дослідження умов виникнення автоколивань. Припустимо, що

$$\omega = U_x \lambda(t), \quad (5)$$

де  $U_x$  – перша форма коливань;

$\lambda(t)$  – невідома функція часу.

Для зручності подальших обчислень виконаємо нормування першої форми коливань так, щоб переміщення на верхньому кінці стрижня дорівнювали  $U_l = 1$ , а розподіл швидкості вітрового потоку по висоті стрижня подамо як  $V_x = V v_x$ , де  $v_l = 1$ ,  $V$  – швидкість потоку в перерізі  $l$ .

Застосувавши процедуру Бубнова-Гальоркіна до системи диференціальних рівнянь (1) з урахуванням виразу (5), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$(1 + \nu)\ddot{\lambda} + \gamma_0 \omega_0^2 \dot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda + \nu \ddot{y} - 0,5\rho \left( \dot{\lambda} V A_1 c_1 - \frac{\dot{\lambda}^3}{V} A_3 c_3 \right) = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{\lambda} + \ddot{y} + \mu_0 \dot{y} + f_0^2 y = 0. \quad (7)$$

Тут  $\omega_0$  – частота основного тону коливань стрижня,  $\nu$  – відносна маса гасника, яка дорівнює

$$\nu = m_1 / \int_0^l m_x U_x^2 dx. \quad (8)$$

Значення коефіцієнтів  $c_1$  і  $c_3$  визначаються за формулою

$$c_j = \int_0^l U_x^{j+1} v_x^{2-j} h_x dx / \int_0^l m_x U_x^2 dx. \quad (9)$$

Для багатьох реальних систем сили тертя залежать від швидкості і не залежать від координати. Характер цієї залежності визначається умовами, у яких відбувається рух. У загальному випадку силу тертя можна описати виразом вигляду

$$H(\dot{\lambda}) = \sum \varepsilon_i \dot{\lambda}^i, \quad i = 1, 3, 5, \dots, \quad (10)$$

де  $\varepsilon_i$  – коефіцієнт тертя при  $i$ -му члені ряду.

Зауважимо, що величина сили тертя обертається в нуль при  $\dot{\lambda} = 0$ , тобто за відсутності рухів. Особливістю досліджуваної системи є те, що сили тертя виконують негативну роботу на одних проміжках руху і позитивну на інших. Таким чином, система може мати автоколивальні властивості. Для зручності досліджень було виконано нормування значень параметрів, що є складовими вихідної системи рівнянь.

Доданок  $\nu \ddot{y}$  в рівнянні (6) вносить суттєві складності до вибору схеми

розрахунків і перевірки основних положень, як стійкість, точність і складність. Крім того, вираз (6) є нелінійним по  $\dot{\lambda}$ . Класичний прийом зниження порядку похідних і перетворення системи (6), (7) з двох рівнянь у систему з чотирьох не має ефекту, тому що функції в правих частинах мають перехресні посилання на невідомі значення змінних. Крім того, застосування явних схем розрахунку ставить питання про стійкість рішення та умов, за яких вона може зберігатись. Суттєвим є питання про величину та незмінність кроку інтегрування на всьому інтервалі або його частинах і метод інтегрування. Використання неявних розрахункових схем є обґрунтованим і забезпечує стійкість рішення незалежно від кроку інтегрування. Складність обчислень і необхідність накопичення великої кількості даних знижується за рахунок вибору засобу реалізації моделі, у даному випадку системи MatLab.

Чисельний аналіз виконаний для таких безрозмірних значень параметрів системи:  $\nu = 0,01$ ;  $\omega_0 = 1$ ;  $\gamma_0 = 0,003$ ;  $\rho = 1,2$ ;  $c_1 = 0,3$ ;  $c_3 = 0,6$ ;  $A_1 = 1$ ;  $A_3 = 1$ ;  $\mu = 0,01$ ;  $f_0^2 = 1$ . Для отримання залежності амплітуди коливань стрижня від швидкості вітрового потоку виконується чисельне інтегрування системи диференціальних рівнянь. Оцінювання амплітуд коливань здійснювалося для 8192 точок коливального процесу. Довжина реалізацій становила 200 циклів коливань. З огляду на можливість існування декількох стійких режимів коливань в області основного резонансу інтегрування проводилося у двох напрямках: збільшення швидкості вітрового потоку – «прямий» прохід, зменшення швидкості – «зворотний»

прохід. Швидкість вітрового потоку змінювалася в діапазоні з  $V = 0,1 \dots 10$  кроком  $\Delta V = 0,1$ . Результати розрахунків показані на рис. 1. Гілка 1 відповідає збільшенню швидкості вітрового потоку, а гілка 2 – зниженню.

Аналізуючи поведінку гілки 2, можна відзначити, що встановлення резонансних коливань відбувається при значенні швидкості вітрового потоку  $V = 7$ . Відмінною особливістю досліджуваної

системи є наявність зони багатозначності амплітуд коливань у діапазоні швидкостей вітрового потоку  $V = 4,6 \dots 7$ .

Встановлення резонансних режимів коливань у даному діапазоні визначається виключно початковими умовами. При збільшенні швидкості вітрового потоку амплітуди коливань зростають і досягають максимального значення при критичному значенні швидкості вітрового потоку  $V = 4,6$  (рис. 2).

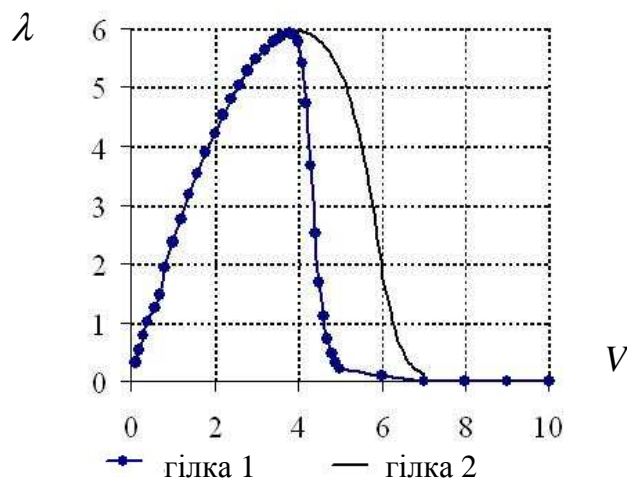


Рис. 1. Залежність амплітуди коливань консольного стрижня від швидкості вітрового потоку за відсутності маятникових гасників коливань

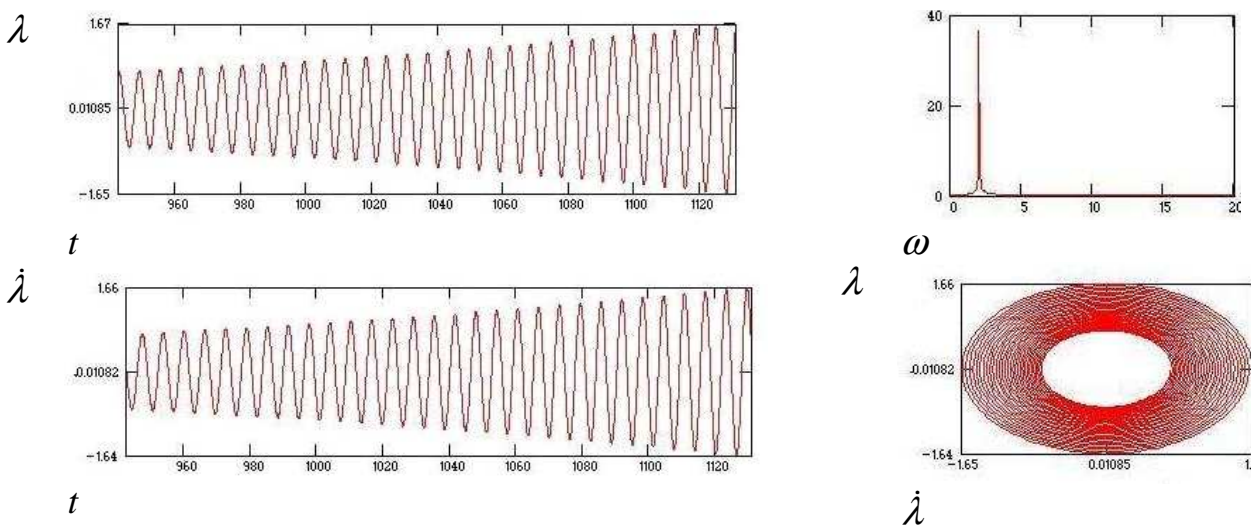


Рис. 2. Часові процеси, спектральні характеристики і фазові траєкторії коливань башти з приєднаним гасником у рівномірному вітровому потоці

На часових процесах цього діапазону спостерігається «розгойдування» системи. При подальшому збільшенні швидкості вітрового потоку амплітуди коливань зменшуються, відбувається перехід на нерезонансну гілку. На перехідних часових процесах спостерігається «зрив» амплітуд

коливань системи. Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок про те, що доцільним є застосування маятникових демпферів з частотами власних коливань, які менше або дорівнюють частоті власних коливань башти  $f_0^2 \leq \omega_0^2$  (рис. 3, а, б).

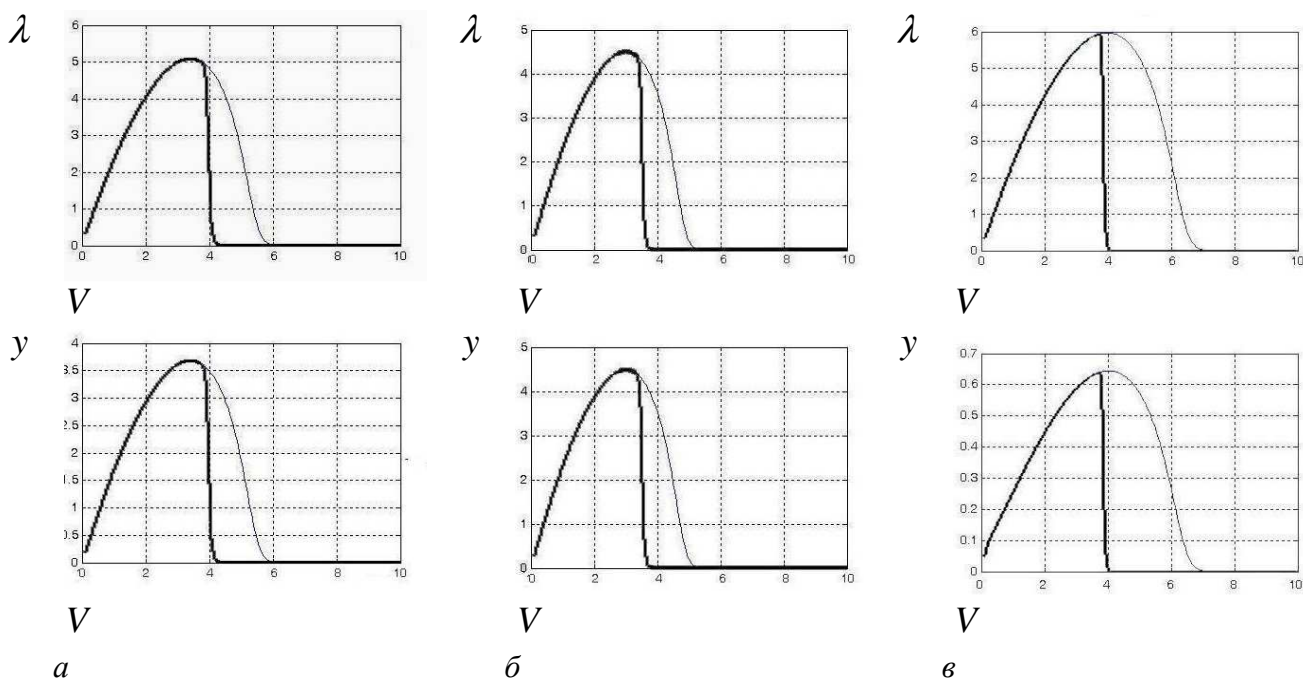


Рис. 3. Залежність амплітуди коливань консольного стрижня з приєднаним маятниковим демпфером від швидкості вітрового потоку: а –  $f_0^2 = 0,5$ ; б –  $f_0^2 = 1$ ; в –  $f_0^2 = 10$

Найбільший ефект зниження амплітуди коливань досягається при  $f_0^2 = \omega_0^2$ . Тут відбувається процес перекачування енергії коливань башти до маятникового демпфера. Амплітуди коливань маятникового демпфера досягають максимальних значень, а амплітуди коливань башти знижуються. Одночасно з цим ширина зони резонансних коливань зменшується. Застосування демпферів, що мають більші частоти власних коливань, ніж частота власних коливань башти  $f_0^2 > \omega_0^2$ , не призводить до істотного зниження енергії коливань башти у вітровому потоці (рис. 3, в).

**Висновки.** Для дослідження динамічної поведінки дисипативної системи з обмеженим збуренням, що містить маятникові віброгасники, використано чисельне моделювання. Для більш детального дослідження поведінки системи в резонансі використана методика приведення до так званої скороченої системи, яка представлена відносно енергії системи, арктангенса відношення амплітуд власних форм коливань до фаз форм коливань. Виявлено, що відбувається перехід енергії від нестійких коливань до стійкої форми коливань, локалізованих на одній з узагальнених координат. У той же час існує форма пов'язаних коливань, яка

реалізується тільки для деякого фіксованого значення енергії вітрового потоку. Деякі траєкторії наближаються до цієї перехідної форми, а потім, коли ця

форма перестає існувати, віддаляються від неї і наближаються до стійкої локалізованої форми коливань.

### Список використаних джерел

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. 735 с.
2. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Damping of free elastic vibrations in linear systems. *Internation Applied Mechanics*. 2005. No. 2. P. 203–209.
3. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Snap-through truss as an absorber of forced oscillations. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. No. 29. P. 705–722.
4. Михлин Ю. В., Решетникова С. Н. Анализ динамического поведения двухмассовой системы при существенно нелинейном виброгашении. *Прикладная механика*. 2005. № 1. С. 102–111.
5. Mikhlin Yu. V., Reshetnikova S. N. Dynamical interaction of an elastic system and essentially nonlinear absorber. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 283. P. 91–120.
6. Nissen J. C., Popp K., Schmalhorst R. Optimization of a non-linear vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*. 1985. No. 99. P. 149–154.
7. Semecigil S. E., Lammers D., Ying Z. A new tuned vibration absorber for wide-band excitations. *Journal of Sound and Vibration*. 1992. No. 156. P. 445–459.
8. Natsiavas S. Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*. 1992. Vol. 156, No. 2. P. 227–245.
9. Gendelman O. V. Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. *Nonlinear Dynamics*. 2004. No. 37. P. 115–128.
10. Вибрации в технике / под ред. К. В. Фролова. Москва: Машиностроение, 1995. 456 с.
11. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. Москва: Наука, 1985. 254 с.
12. Cuvalci O., Cuvalci O., Ertas A. Pendulum as vibration absorber for flexible structures: experiments and theory. *Trans. of the ASME. Journal of Vibration Acoustics*. 1996. Vol. 118. P. 558–566.

---

Волкова Вікторія Євгенівна, д-р техн. наук, професор кафедри будівництва, геотехніки і геомеханіки Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: drvev09@gmail.com.

Шаповал Ірина Вікторівна, старший викладач кафедри комп'ютерні інформаційні технології Дніпровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. E-mail: irvksh88@gmail.com.

Volkova Viktorija E., D. Sc. (Tech.), professor, Department of Construction, Geotechnics and Geomechanics, Dnipro University of Technology. E-mail: drvev09@gmail.com.

Shapoval Irina, Senior Lecture, Department of Computer Information Technology, Dnipro National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan. E-mail: irvksh88@gmail.com.

Статтю прийнято 20.09.2019 р.