

УДК 537.84

ВЕРИФІКАЦІЯ РОЗРАХУНКУ ТЕЧІЇ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ РІДИНИ В КРУГЛИХ ТРУБАХ

Доктори техн. наук Н. Б. Чернецька-Білецька, А. С. Роговий,
старш. викл. М. В. Мірошникова, магістрант А. Р. Штиков

VERIFICATION OF ELECTRICALLY CONDUCTIVE FLUID FLOW CALCULATION IN CIRCULAR PIPES

Dr. Sc. (Tech.) N. Chernetskaya-Beletskaya, Dr. Sc. (Tech.) A. Rogovyi,
Sr. lecturer M. Miroshnykova, master A. Shtykov

DOI: <https://doi.org/10.18664/1994-7852.196.2021.242076>

Анотація. На основі порівняння результатів чисельного розрахунку з експериментальними даними проведено верифікацію розрахунку течії електропровідної рідини в круглих трубах та визначено оптимальну за похибкою розрахунку модель турбулентності й параметрів її використання. Дослідження проводилося на основі порівняння експериментальних досліджень за PIV-методом велосиметрії. Рідина вважалася в'язкою, нестисливою та електропровідною. Керуючі нелінійні рівняння імпульсу розв'язуються чисельно, використовуючи метод контрольних об'ємів. Аналіз суми квадратів

відхилень розрахункових точок від експериментальних показав, що для течії без впливу магнітного поля найкращою є модель турбулентності BSL Reynolds Stress, при наявності магнітного поля – $k-\varepsilon$ модель. Кількість елементів сітки практично не впливає на точність розрахунку перепаду тиску.

Ключові слова: електропровідна рідина, верифікація, чисельний розрахунок, математичне моделювання, магнітна гідродинаміка.

Abstract. Magnetohydrodynamics (MHD) treats the phenomena that arise in fluid dynamics from the interaction of an electrically conducting fluid with the electromagnetic field. The development of computational hydrodynamics has significantly improved the accuracy of calculations on mathematical models, but it is still difficult to choose the optimal turbulence models, mesh quality, model parameters to solve a particular problem. The aim of the work is to verify the calculation of the conducting fluid flow in circular pipes and to determine the optimal error of the turbulence model calculation and the parameters of its use. The study was conducted on the basis of a comparison of experimental studies by the PIV-method of velocimetry with the results of numerical calculations. The liquid is considered viscous, incompressible, and electrically conducting. Control nonlinear momentum equations are solved numerically using the method of control volumes. Comparison of velocity profiles showed that almost all models show a fairly good match with the results of the experiment. Analysis of the sum of squares residuals of calculation points from experimental shows that the BSL Reynolds Stress turbulence model is the best for the flow without the influence of the magnetic field, and the $k-\varepsilon$ model is the best in the presence of a magnetic field. The SST $k-\omega$ model has quite enough results regardless of the Hartmann number. The number of mesh elements has little effect on the accuracy of the pressure drop calculation. For simple geometries it is enough to use meshes with the number of elements that does not exceed the 500000 elements. According to all criteria, it is rational to choose the $k-\varepsilon$ turbulence model for further calculations. This model has some shortcomings in the calculation of wall layers, but allows to obtain high-quality and adequate results for the flow of conducting fluid with a limit on the mesh elements number.

Keywords: electrically conducting fluid, verification, numerical calculation, mathematical modeling, magnetohydrodynamics.

Вступ. Магнітогідродинаміка (МГД) розглядає явища, що виникають під час руху електропровідної рідини внаслідок взаємодії рідини з електромагнітним полем [1, 2]. Вивчення руху електропровідних розплавів металів під поперечно прикладеним магнітним полем стало основою багатьох наукових та інженерних застосувань і пристроїв, а саме МГД-насосів, МГД-генерації електроенергії тощо [3, 4]. З іншого боку, потік пилоподібної електропровідної рідини через трубу в присутності поперечного магнітного поля має такі самі особливості, що й потік рідин у генераторах і плазмових прискорювачах [5].

За останні тридцять років дослідження будь-яких течій рідини щільно пов'язані з

використанням чисельних методів розрахунку [6]. На сьогоднішній день існує досить багато програмних продуктів для CFD-розрахунків. Практично всі вони є валідованими для різних типів течій, але для інженерних розрахунків необхідно проводити верифікацію програмного продукту для розрахунків нових типів задач з метою пошуку оптимальних моделей турбулентності, якості сіткового розбиття та інших параметрів розрахунку [7].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Змішані гідродинамічні та електромагнітні проблеми хоча й входять у достатньо нову галузь механіки рідини та газу, але все більше привертають увагу багатьох дослідників. Перша робота щодо

руху електропровідної рідини опублікована Гартманом в 1937 році [8], в ній, на основі аналітичних розрахунків й експериментальним шляхом, досліджувалось поведіння ртуті. Протягом п'ятдесяти років дослідження руху електропровідних рідин проводилося аналітичним шляхом із використанням великої кількості спрощень, що приводило до таких значних похибок у визначенні гідравлічних параметрів, як втрати тиску, швидкість рідини [9]. На відміну від досліджень загальних рідин експериментальні дослідження електропровідних дещо ускладнені внаслідок використання потужних електромагнітів для досліджень і створення однорідних чи неоднорідних магнітних полів [8, 10, 11]. Експериментальні дослідження потребують коштовної сучасної техніки на основі PIV-велосиметрії (оптичний метод візуалізації потоку за зображенням частинок) та значних витрат часу на аналіз результатів внаслідок впливу турбулентності [11].

Розвиток обчислювальної гідродинаміки дозволив значно підвищити точність розрахунків за математичними моделями [11], але все ще залишається складним вибір оптимальних моделей турбулентності, якості сітки, параметрів моделі для вирішення конкретного завдання. Так, в роботі [10] використано метод прямого чисельного моделювання (DNS), що дозволяє дуже точно описати параметри течії, але цей метод практично неможливо використовувати в інженерних розрахунках внаслідок дуже великих витрат часу на розрахунок та аналіз результатів.

В роботі [12] використано декілька таких моделей турбулентності, як $k-\epsilon$, (RNG) $k-\epsilon$, $k-\omega$ та SST $k-\omega$, зроблено висновок, що найкраще описує рух рідини (RNG) $k-\epsilon$ модель, але, як показує досвід розрахунків течії неньютонівських рідин [13], практично для кожного виду рідин необхідно підбирати свою модель турбулентності [14, 15].

Визначення мети та завдання дослідження. Верифікація розрахунку течії електропровідної рідини в круглих трубах та визначення оптимальної за похибкою розрахунку моделі турбулентності й параметрів її використання.

Дослідження проводилося на основі порівняння експериментальних досліджень за PIV-методом велосиметрії, що наведено в роботі [10], з результатами чисельного розрахунку. Рідина вважалася в'язкою, нестисливою та електропровідною. Керуючі нелінійні рівняння імпульсу розв'язувалися чисельно, використовуючи метод контрольних об'ємів у програмному середовищі Ansys CFX. Програмний комплекс використано на умовах студентської ліцензії з обмеженням на кількість елементів, що не перевищує 500000.

Основна частина дослідження. Для проведення верифікації результатів розрахунку необхідно мати надійні експериментальні результати [16], тому вирішено обрати результати велосиметрії електропровідної рідини, що наведені в роботі [10]. Експериментальні дослідження проведені для 30 % водного розчину гідроксиду калію (КОН). Основні фізичні властивості рідини подані в табл. 1.

Таблиця 1

Фізичні властивості 30 % водного розчину гідроксиду калію

		КОН
ρ	Густина, кг/м ³	1280
μ	Динамічна в'язкість, Па с	0,00143
ν	Кінематична в'язкість, м ² /с	$1,18 \times 10^{-6}$
σ	Електропровідність, См/м	73,67
λ	Теплопровідність, Вт/(м К)	0,727
C_p	Теплоємність, Дж/(кг К)	3000

Верифікацію проведено на основі порівняння профілів швидкості рідини під впливом поперечного магнітного поля та без нього.

Під час математичного моделювання розглянуто випадок стаціонарного руху нестисливої рідини, що має постійну

електропровідність і знаходиться під дією зовнішнього стаціонарного однорідного магнітного поля.

Математична модель складається з рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої рідини (1) та рівняння нерозривності (2) [17]:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + f_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

де p – гідродинамічний тиск;

ρ – густина;

x_j – декартові координати;

u_j – проекції швидкості в декартовій системі координат;

t – час;

f_i – проекції вектора масових сил на осі координат;

μ – динамічна (молекулярна) в'язкість.

У розглянутій задачі течії електропровідної рідини як масову силу f_i необхідно врахувати силу Лоренца [18].

Рідина піддається впливу зовнішнього магнітного поля з вектором магнітної індукції \vec{B} . Потік рідини буде індукувати електричні струми в рідині, а вони в свою чергу породжують індуковане магнітне поле, яке можна розглядати як збурення зовнішнього поля. Відносний розмір цього збурення регулюється безрозмірним магнітним числом Рейнольдса

$$Rm_L = \eta \sigma u L, \quad (3)$$

де η – магнітна проникність;

L – характерний розмір.

У більшості промислових та лабораторних течій магнітне число Рейнольдса дуже низьке, $Rm_L \ll 1$. Збурення магнітного поля, спричинені течією рідини, незначні у порівнянні з зовнішнім полем. Використовуючи це «квазістатичне наближення», нерелятивістські рівняння Максвелла дають визначення сили Лоренца

$$\vec{f} = [\vec{j} \times \vec{B}], \quad (4)$$

де \vec{j} – густина електричного струму, що виникає в електропровідній рідині, яка рухається зі швидкістю \vec{u} за рахунок місцевого електричного поля з напругою \vec{E} і магнітного поля, що визначається узагальненим законом Ома [19]:

$$\vec{j} = \sigma [\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}]. \quad (5)$$

Скалярний електростатичний потенціал φ визначається за формулою

$$\vec{E} = -\nabla \varphi. \quad (6)$$

За відсутності вільних зарядів

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot [\vec{u} \times \vec{B}]. \quad (7)$$

Розв'язання отриманої системи диференціальних рівнянь в часткових похідних (1)–(7) можливе чисельними методами, але внаслідок того, що для їх розв'язання необхідно використати надзвичайно великі комп'ютерні потужності з великими витратами часу на обробку результатів, оптимальним є осереднення рівнянь Нав'є-Стокса за Рейнольдсом [20]. Цей підхід заснований на осередненні рівнянь, а потім на їх інтегруванні. При цьому з'являється додатковий тензор напруг, але, у випадку стаціонарної осередненої турбулентної течії обертаються в нуль локальні прискорення. Розрахунок таких рівнянь значно спрощується порівняно з рівняннями Нав'є-Стокса.

Осереднення Рейнольдса застосовується шляхом розділення миттєвих змінних на середню та пульсаційну частини. Середнє значення величини v визначається як середнє значення ансамблю за нескінченною кількістю реалізацій v_n [18]

$$\langle v \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n. \quad (8)$$

Будемо використовувати великі літери для середніх значень, а малі – для

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial Q}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_Q \frac{\partial Q}{\partial x_j} + \rho \langle u'_j q' \rangle \right) + S_Q, \quad (11)$$

де S_Q – джерело;

Γ_Q – дифузійна складова потоку величини Q .

У рівняннях руху члени виду $\rho \langle u'_i u'_j \rangle$ є напругами Рейнольдса. Для визначення зв'язку між напругами Рейнольдсу та іншими параметрами потоку необхідно використовувати додаткові залежності – модель турбулентності [19, 21].

позначення пульсаційних. Швидкість, наприклад, виражається як сума $U_i + u'_i$, де U_i – середня швидкість, а u'_i – пульсаційна складова швидкості. За визначенням, середнє значення пульсаційних складових дорівнює нулю.

Осереднення описаним способом рівнянь (1) і (2) дає осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса (RANS) та рівняння нерозривності:

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \langle u'_i u'_j \rangle \right) + F_i, \quad (9)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (10)$$

де F_i – сила Лоренца.

Після осереднення Рейнольдса рівняння транспорту величини Q через поверхню, яка обмежує контрольний об'єм, враховуючи, що $q = Q + q'$,

В даний час розроблені сотні моделей турбулентності, але жодна з них не є універсальною, тобто підходящою для будь-яких течій [22].

Осереднення Рейнольдса необхідно здійснити також для рівнянь Максвелла (4)–(7). Таким чином, середня сила Лоренца

F_i у рівнянні (9) визначається таким чином:

$$\bar{F} = [\bar{J} \times \bar{B}]. \quad (12)$$

Середня густина електричного струму

$$\bar{J} = \sigma [-\nabla\Phi + \bar{U} \times \bar{B}]. \quad (13)$$

Використовуючи рівняння $\nabla \cdot \bar{J} = 0$, отримуємо

$$\nabla(\sigma \nabla\Phi) = \nabla \cdot [\sigma \bar{U} \times \bar{B}]. \quad (14)$$

Для постійної електропровідності σ

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot [\bar{U} \times \bar{B}]. \quad (15)$$

Силу Лоренца можна обчислити, якщо спочатку розв'язати рівняння (14) з відповідними граничними умовами. Якщо \bar{n} – орт внутрішньої нормалі, то рівняння (13) розв'язують з граничною умовою Неймана:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{J_n}{\sigma} + \bar{n} \cdot [\bar{U} \times \bar{B}], \quad (16)$$

де $J_n = \bar{J} \cdot \bar{n}$ – струм на вході в домен. Непровідна стінка має нульовий струм за нормаллю $J_n = 0$. Для нерухомої стінки з граничною умовою відсутності ковзання гранична умова для Φ тоді просто

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0. \quad (17)$$

Формальне розв'язання рівняння (14) лише з граничними умовами Неймана містить невизначений постійний член. Для завдання граничних умов електричний потенціал повинен бути чітко вказаний

принаймні в одній точці області. Як альтернатива, фіксований електричний потенціал може бути заданий на одній або декількох стінках.

У моделях турбулентної в'язкості напруги Рейнольдса моделюються з використанням гіпотези Бусінеска [19, 23], яка зв'язує анізотропію напруг Рейнольдса з турбулентною в'язкістю,

$$\rho \langle u'_i u'_j \rangle = -\frac{2}{3} \rho K \delta_{ij} + \mu_T S_{ij}, \quad (18)$$

де μ_T – турбулентна в'язкість;

K – кінетична енергія турбулентності та осереднений тензор відносних швидкостей деформацій S :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (19)$$

Під час даного дослідження виявлено, що раціональні результати за часом розрахунку та якістю співпадіння результатів розрахунку та експерименту показала модель турбулентності k-ε. Тому математична модель, яка для цієї моделі складається з двох рівнянь перенесення характеристик турбулентності наведена саме для цієї моделі турбулентності. Математичне формулювання інших використаних моделей турбулентності можна знайти в джерелах [17, 22, 24].

Модель турбулентності k-ε містить два диференціальних рівняння для перенесення характеристик турбулентності: кінетичної енергії турбулентності K й швидкості її дисипації \mathcal{E} .

$$\mu_T = C_\mu \rho \frac{K^2}{\mathcal{E}}, \quad (20)$$

де C_μ – емпіричний коефіцієнт моделі.

Якщо напруги Рейнольдса в рівнянні (9) замінити записом (18), отримаємо

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \\ = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left([\mu + \mu_T] \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + F_i, \end{aligned} \quad (21)$$

За аналогією з рівнянням (18) маємо гіпотезу, що

$$\rho \langle u'_i q' \rangle = \frac{\mu_T}{\sigma_Q} \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \quad (22)$$

де σ_Q – турбулентне число Прандтля. Тоді осереднене рівняння перенесення величини Q набуває вигляду

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial Q}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left[\Gamma_Q + \frac{\mu_T}{\sigma_Q} \right] \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) = S_Q. \quad (23)$$

Нехтуючи молекулярною дифузією [25],

$$\rho \frac{\partial K}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial K}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) = \rho (P_K - \varepsilon) + S_K, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = \\ = \rho \left(C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P_K - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \right) + S_\varepsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

Тут P_K – генераційний член, який моделюється з використанням гіпотези турбулентної в'язкості (18),

$$P_K = \frac{P_{ii}}{2} = \frac{\mu_T}{\rho} S_{ij} S_{ji}. \quad (26)$$

S_K, S_ε – джерельні члени, зумовлені масовими силами в рівняннях Нав'є-Стокса (1). $C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_K, \sigma_\varepsilon$ – емпіричні константи моделі [22, 24].

Таким чином, математична модель, що розв'язується програмним комплексом чисельним способом за допомогою методу контрольних об'ємів, складається з рівнянь (12)–(26).

Для розрахунку використано програмний продукт Ansys CFX на умовах академічної студентської ліцензії. Число елементів сіткового розбиття не перевищувало 500000. Цей програмний комплекс є валідованим для усіх класів течій, у тому числі для розрахунків магнітної гідродинаміки [18, 24, 26].

Сітки побудовані на основі призматичних і тетрагональних елементів [27]. Розрахунки завершувалися при виконанні двох умов: зменшення нев'язань розв'язання всіх рівнянь до значень 10^{-5} і забезпечення постійного за ітераціями перепаду тиску в трубопроводі. Тобто перепад тиску повинен змінюватися не більше ніж на 0,1% за 10 ітерацій, коли визначено, що зміна перепаду має коливальний характер.

Використовувалися чисельні схеми другого порядку.

У вхідному перетині каналу трубопроводу задавалася максимальна швидкість величиною $V_{\max} = 0,14$ м/с. Для моделювання повністю розвинутого прилежого шару біля твердих стінок профіль швидкості на вході задавався за залежністю

$$V = V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}, \quad (27)$$

де r – поточний радіус точки в перетині труби;

$R = 0,0445$ м – радіус труби.

У вихідному перетині труби задавалася відкрита межа з нульовим статичним тиском. Інтенсивність турбулентності задана величиною 5 % згідно з роботою [28]. Моделювалися турбулентні режими течії з числами Рейнольдса $Re = 11300$, тобто геометричні параметри та числа Рейнольдса були такі, як і в експерименті [10].

Вибір найкращої моделі турбулентності здійснено на основі порівняння профілів швидкості в трубі. Загалом порівнювалися чотири моделі турбулентності. Графіки розподілу швидкості наведено на рис. 1.

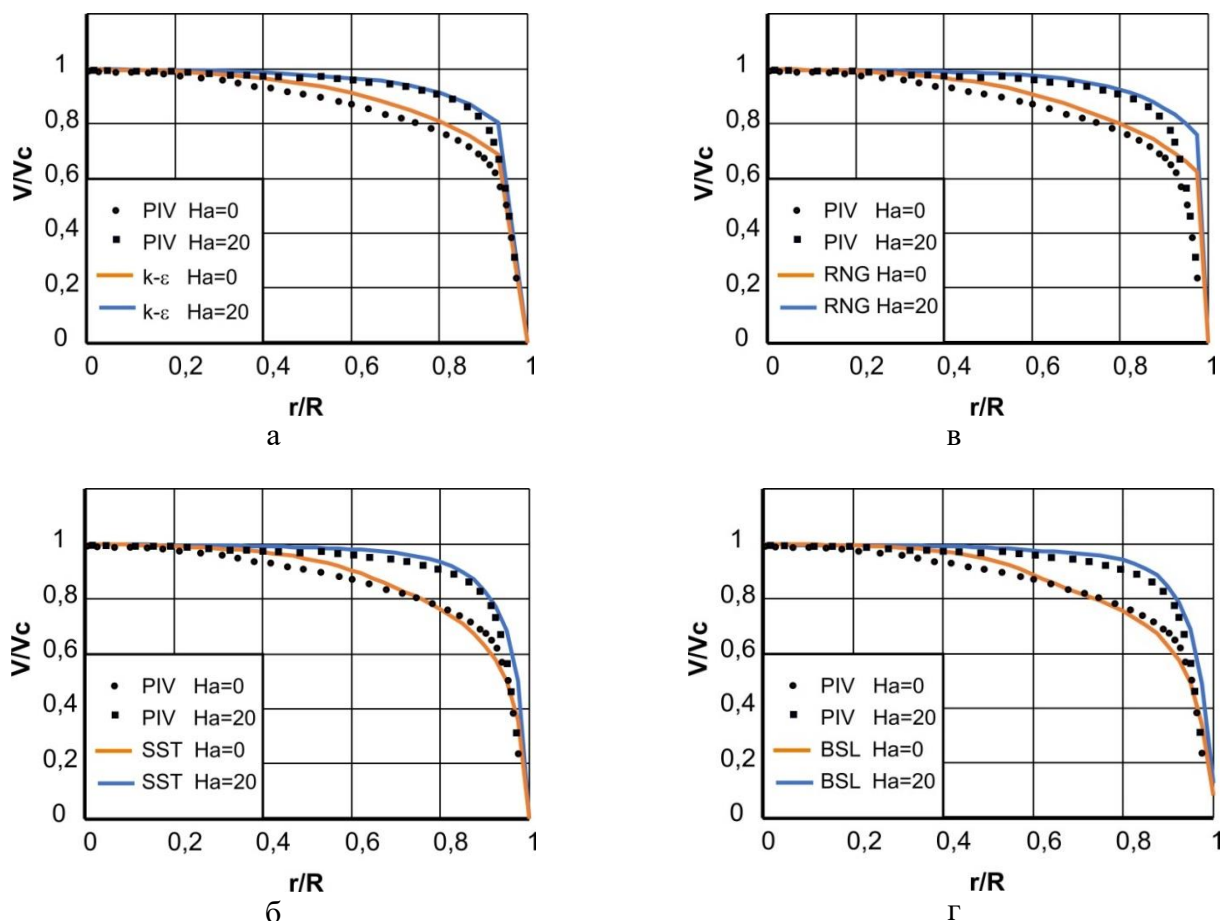


Рис. 1. Порівняння розподілу швидкості в трубі з використанням різних моделей турбулентності: а – k-ε; б – SST k-ω; в – (RNG) k-ε; г – BSL Reynolds Stress

Для порівняння результатів МГД розрахунків використовують критеріальне число Гартмана

$$Ha = BR\sqrt{\sigma / \rho\nu} . \quad (28)$$

Практично всі моделі демонструють досить гарний збіг з результатами експерименту. Для обґрунтування вибору моделі визначено суму квадратів відхилень розрахункових точок від експериментальних. Результати щодо суми квадратів наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Сума квадратів відхилень розрахункових точок від експериментальних для різних моделей турбулентності

Модель турбулентності	Число Гартмана, Ha	Сума квадратів відхилень
k-ε	0	0,0469
	20	0,0208
SST k-ω	0	0,0377
	20	0,0471
(RNG) k-ε	0	0,0836
	20	0,246
BSL Reynolds Stress	0	0,0228
	20	0,0537

Аналіз даних табл. 2 показує, що для течії без впливу магнітного поля найкращою є модель турбулентності BSL Reynolds Stress, при наявності магнітного поля – k-ε модель. SST k-ω модель має досить гарні показники без залежності від числа Гартмана. SST k-ω модель турбулентності демонструє досить посередні показники внаслідок малої кількості використаних елементів у сітковому розбитті. Збільшення елементів у прилеглому шарі та відповідне зменшення показника u^+ має покращити якість розрахунку за цією моделлю [31], але це збільшить час розрахунку, що є небажаним під час пошуку оптимальних параметрів розрахунку електропровідної рідини для інженерної мети створення установки для очищення конденсаторних труб.

Порівняння контурів розподілу швидкості течії електропровідної рідини з числом Гартмана ($Ha=20$) для різних моделей турбулентності наведено на рис. 2.

Тут можна бачити, що за кольором розподілу швидкості практично не можна розрізнити моделі турбулентності, тому за усіма критеріями раціонально для подальших розрахунків обрати k-ε модель турбулентності. Ця модель має деякі недоліки щодо розрахунку пристінних шарів, але дозволяє отримати якісні та адекватні результати для течії електропровідної рідини з обмеженням на кількість елементів розрахункової сітки.

На рис. 3 наведено аналіз вибору сіткового розбиття. Аналіз проведено для двох моделей турбулентності k-ε та SST.

Отримано, що кількість елементів сітки практично не впливає на точність розрахунку перепаду тиску. Перепад тиску віднесено до перепаду тиску, який одержано для сіток з кількістю елементів 500000. Це означає, що незалежно від моделі турбулентності для простих геометрій достатньо використовувати сіткові розбиття з кількістю елементів, що не перевищує параметри академічної ліцензії Ansys CFX.

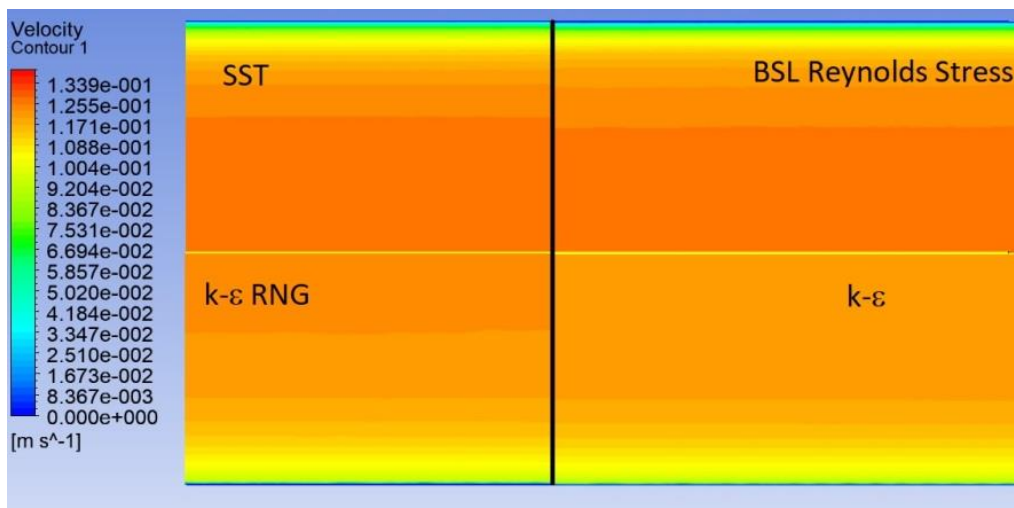


Рис. 2. Порівняння контурів швидкості течії рідини з числом Гартмана ($Ha=20$)

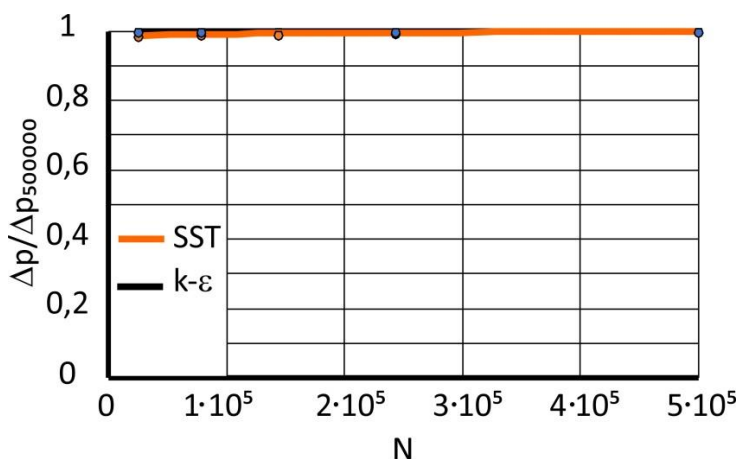


Рис. 3. Залежність результатів розрахунку перепаду тиску в трубопроводі від кількості елементів сітки

Висновки. На основі порівняння результатів чисельного розрахунку з експериментальними даними проведено верифікацію розрахунку течії електропровідної рідини в круглих трубах та визначено оптимальну за похибкою розрахунку модель турбулентності й параметрів її використання.

1. Порівняння профілів швидкості показало, що практично всі моделі демонструють досить гарний збіг з результатами експерименту.

2. Аналіз суми квадратів відхилень розрахункових точок від експериментальних показує, що для течії без впливу магнітного поля найкращою є модель турбулентності BSL Reynolds Stress, при наявності магнітного поля – k-ε модель.

3. Кількість елементів сітки практично не впливає на точність розрахунку перепаду тиску. Для простих геометрій достатньо використовувати сіткові розбиття з кількістю елементів, що не перевищує $5 \cdot 10^5$ елементів.

Список використаних джерел

1. Frank M. Visual analysis of two-dimensional magnetohydrodynamics. *Phys. Fluids*. 2001. Vol. 13. 2287-2295.
2. Gedik E., Kurt H., Recebli Z. CFD simulation of magnetohydrodynamic flow of a liquid-metal galinstan fluid in circular pipes. *Fluid Dynamics and Materials Processing*. 2013. 9(1). P. 23-33.
3. Sabu A. S., Mathew A., Neethu T. S., George K. A. Statistical analysis of MHD convective ferro-nanofluid flow through an inclined channel with hall current, heat source and solet effect. *Thermal Science and Engineering Progress*. 2021. 22. 100816.
4. Nijhawan P., Singla M. K., Gupta J. A Proposed Hybrid Model for Electric Power Generation: A Case Study of Rajasthan, India. *IETE Journal of Research*. 2021. P. 1-11.
5. Attia H. A., Ahmed M. E. Circular pipe MHD flow of a dusty Bingham fluid. *Journal of Applied Science and Engineering*. 2005. 8(4). P. 257-265.
6. Сємин Д. А., Роговой А. С. Влияние типа и размера расчетных сеток на точность расчета течений в вихрекамерных нагнетателях. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Сер. Гідравлічні машини та гідроагрегати. 2016. № 41 (1213). С. 70-77.
7. Верификация расчетов течений в вихрекамерных устройствах / Д. А. Сємин, А. С. Роговой, А. Н. Левашов, Я. Н. Левашов. *Вісник НТУ «ХПИ»*. Сер. Машинобудування. 2016. № 2 (77). С. 71-78.
8. Hartmann J., Lazarus F. Hg-dynamics II. Theory of laminar flow of electrically conductive Liquids in a Homogeneous Magnetic Field. 1937. 15(7). 47 p.
9. Davidson P. A. Magnetohydrodynamics in materials processing. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1999. 31(1). P. 273-300.
10. Takeuchi J., Satake S.I., Morley N.B., Kunugi T., Yokomine T., Abdou M.A. Experimental study of MHD effects on turbulent flow of Flibe simulant fluid in circular pipe. *Fusion Engineering and Design*. 2008. 83 (7-9). P. 1082-1086.
11. Zhang X., Pan C., Xu Z. Experimental investigations on liquid metal MHD turbulent flows through a circular pipe with a conductive wall. *Fusion Engineering and Design*. 2017. 125. P. 647-652.
12. Rogovyi A. S. Verification of fluid flow calculation in vortex chamber superchargers. *Автомобильный транспорт: сб. науч. тр.* Харьков, 2016. Вып. 39. С. 39-46.
13. Tavangar S., Hashemabadi S. H., Saberimoghadam A. CFD simulation for secondary breakup of coalewater slurry drops using OpenFOAM. *Fuel Process Technol.* 2015. 132. P. 153-163.
14. Chernetskaya-Beletskaya N., Rogovyi A., Baranov I., Krut A., Miroshnikova M., Bragin N. Increasing the efficiency of highly concentrated coal-water fuel based on the simulation of non-Newtonian fluid flow. *In MATEC Web of Conferences*. 2019. Vol. 294. 01009.
15. Rogovyi A., Korohodskiy V., Medvediev Ye. Influence of Bingham fluid viscosity on energy performances of a vortex chamber pump. *Energy*. 2021. Vol. 218. 119432.
16. American Institute of Aeronautics and Astronautics. AIAA guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations. American Institute of aeronautics and astronautics; 1998. 15 p.
17. Сьомін Д. О., Роговий А. С. Вихорокамерні нагнітачі: монографія. Харків. ФОП Мезіна В. В. 2017. 204 с.
18. Widlund O. Implementation of MHD model equations in CFX 4.3. 2000. P. 133–179.
19. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. Изд. 7-е, испр. Москва: Дрофа, 2003. 840 с.
20. Роговий А. С. Розробка теорії та методів розрахунку вихорокамерних нагнітачів: дис... д-ра техн. наук : спец. 05.05.17 / Харківський нац. автомобільно-дорожній ун-т. Харків, 2017. 364 с.

21. Математична модель просторової тривимірної течії водовугільного палива / Н. Б. Чернецька-Білецька, А. С. Роговий, І. О. Баранов, М. В. Мірошникова. *Вісник СНУ ім. В. Даля*. Сєверодонецьк: Вид-во Східноукр. нац. ун-ту ім. В.Даля. 2018. № 1 (242). С. 159-164.
 22. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учеб. пособ. Санкт-Петербург: Изд-во Политех-го ун-та, 2012. 88 с.
 23. Вихрові виконавчі пристрої: у 2-х ч.: монографія / Д. О.Сьомін, В. О. Павлюченко, Я. І. Мальцев, С. В. Войцеховський, А. С. Роговий, Л. В. Дмитрієнко, М. О. Мальцева. Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2009. Ч. 1. Однорідні робочі середовища. 256 с.
 24. Ansys C. F. X. Solver Theory Guide. Release 2019 R3. Canonsburg: ANSYS. 2019. 814 p.
 25. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.* 1974. 3. P. 269–289.
 26. Zhang H., Li J., Wang Z., Xu Y., Lai Y. The numerical modeling of melt flow and mhd instabilities in an aluminum reduction cell. *JOM*, 2010. 62(11). P. 26-31.
 27. Matyushenko A. A., Stabnikov A. S., Garbaruk A. V. Criteria of computational grid generation for turbulence models taking into account laminar-turbulent transition. *In Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1400, No. 7. 077047.
 28. Han X., Sagaut P., Lucor D. On sensitivity of RANS simulations to uncertain turbulent inflow conditions. *Comput. Fluids*. 2012. Vol. 61. P. 2–5.
-

Чернецька-Білецька Наталія Борисівна, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри «Логістичне управління та безпека руху на транспорті» Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля.

ORCID iD: 0000-0002-7782-4003. Тел.: +38(050)745-36-30. E-mail: logistyka.snu.edu.ua@gmail.com.

Роговий Андрій Сергійович, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри гідравлічних машин НТУ «ХПІ».

ORCID iD: 0000-0002-6057-4845. E-mail: asrogovoy@ukr.net.

Мірошникова Марія Володимирівна, старший викладач кафедри «Логістичне управління та безпека руху на транспорті» Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля.

ORCID iD: 0000-0002-8370-6724. E-mail: citroen4ik@gmail.com.

Штиков Антон Романович, магістрант Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля.

Chernetskaya-Beletskaya Nataliia, Dr. Sc. (Tech.), professor, department of logistics and traffic safety, Volodymyr Dahl East Ukrainian National University. ORCID iD: 0000-0002-7782-4003. Tel.: +38(050)745-36-30.

E-mail: logistyka.snu.edu.ua@gmail.com.

Rogovyi Andrii, Dr. Sc. (Tech.), professor, head of the department of Hydraulic machines, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute». ORCID iD: 0000-0002-6057-4845. E-mail: asrogovoy@ukr.net.

Miroshnykova Mariia, Senior Lecturer, department of logistics and traffic safety, Volodymyr Dahl East Ukrainian National University. ORCID iD: 0000-0002-8370-6724. E-mail: citroen4ik@gmail.com.

Shtykov Anton, master, Volodymyr Dahl East Ukrainian National University.

Статтю прийнято 16.06.2021 р.