УДК 534.6-8

РОЗВ'ЯЗАННЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ В ЗАДАЧІ ПРО РОЗПОВСЮДЖЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ХВИЛЬ У ДВОВИМІРНОМУ ШАРУВАТОМУ СЕРЕДОВИЩІ З МАЙЖЕ ІНВАРІАНТНИМ ВІДНОШЕННЯМ МАТЕРІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

Асист. О. В. Казанко, старш. викл. О. Є. Пєнкіна

SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN PROPROPAGATION OF MECHANICAL WAVES PROBLEM IN A TWO-DIMENSIONAL LAYERED MEDIUM WITH ALMOST INVARIANT RELATION OF MATERIAL AND GEOMETRIC PARAMETERS

Assistant A. Kazanko, senior lecturer O. Penkina

DOI: https://doi.org/10.18664/1994-7852.210.2024.320674

Анотація. *Питання, розглянуті в роботі, зорієнтовані на перспективне створення напрацювань у галузі реалізації штучних властивостей у пружних внутрішньо структурованих (несуцільних) середовищах у зв'язку із розсіюванням у них механічних (акустичних) хвиль. Автори розвивають думку про те, що шарувате строго періодичне середовище може бути модифіковано за матеріальним і геометричним параметрами (розглянуто плоску необмежену вздовж періодичності модель середовища*). *Передумовою для розвитку цієї ідеї послужило припущення про існування інваріантних форм у дисперсійному рівнянні, що пов'язує параметри середовища з умовами розв'язності проблеми Штурма-*

Ліувілля. Для реалізації зазначених модифікацій залучено апарат майже-періодичних функцій. Автори роботи вдаються до спроб розв’язати задачу на власні коливання (проблему Штурма-Ліувілля).

Ключові слова: *проблема Штурма-Ліувілля, внутрішньо структуроване середовище, пружне середовище, шарувате середовище, метод матриці перенесення, скалярне хвильове рівняння, розповсюдження хвиль, ефект акустичного лінзування, майже-періодичні функції, функції Безіковича.*

Abstract. *The issues raised in the current work are oriented towards the prospective creation of developments in the field of realization of artificial properties in elastic internally structured (discontinuous) media in connection with the scattering of mechanical (acoustic) waves in them. The well-known principle of emergence predicts the appearance of properties in a system (in any system of arbitrary nature) that are not inherent to each constituent element separately. This principle encourages us to look at the realization of properties in these things precisely through the realization of structuredness. In particular, we are talking about elastic media in connection with the propagation of mechanical waves in them. The authors develop the opinion that a layered strictly periodic medium can be modified by material and geometric parameters (a flat model of the medium unlimited along the periodicity is considered). The premise for the development of this idea was the assumption of the existence of invariant forms in the dispersion equation (equations that connect the parameters of the environment with the conditions for the solvability of the Sturm-Liouville problem). For the implementation of these modifications, the apparatus of quasi-periodic functions is involved. Without going beyond the scope of generality, such an apparatus, in particular, allows you to formulate research results in terms inaccessible to the concepts of strictly periodic functions (almost-period, almost-root, almost equal, etc.). The authors of the paper resort to attempts to solve the problem on its eigen oscillations (the Sturm-Liouville problem), putting forward the idea of ow to achieve the constituent condition of its solvability and, accordingly, write down the equation connecting this condition with the parameters of the environment (dispersion equation).*

Keywords: *Sturm-Liouville problem, internally structured medium, elastic medium, layered medium, transfer matrix method, scalar wave equation, wave propagation, acoustic lensing effect, quasi-periodic functions, Bezekovich functions.*

Вступ. Сьогодні завдяки розвитку технологій 3D-друку та нанотехнології цікавість до внутрішньо структурованих середовищ продовжує зростати. До цих середовищ (матеріалів) застосовано термін «штучний» [1, 2]. Справа в тому, що наявність раніше не використовуваних властивостей у внутрішньо структурованих середовищах може бути пояснена принципом емерджентності – *поява нових властивостей у структурах*, тобто *поява властивостей, не притаманних кожній окремій складовій певної структури*. Світу, що оточує людину, притаманна питома структурованість – характерна риса всесвіту: кристали, молекули-полімери, гірські магматичні породи (граніт), планетарні, зоряні системи, галактики є структурами в неживій природі, павутиння (властивості: міцність, шарнірність), бджолині стільники – у живій природі тощо. Структури можуть набувати властивостей не лише завдяки складовим елементам, а і характеру структурованості. Наприклад, твердий алмаз і м’який графіт складаються з одних і тих самих атомів вуглецю, але саме завдяки структурованості алмаз стає особливо твердим.

У випадку із середовищами не зовсім зрозуміло, що саме слід протиставити штучним внутрішньо структурованим середовищам. Якщо говорити про структури, то в будь-якому разі слід говорити й про компоненти. Кожен компонент має свої властивості. Поєднання компонентів і встановлення стійких у часі відношень між цими компонентами (встановлення компонентного взаємозв’язку) є утворенням структури. Якщо якесь відношення між компонентами або властивість компонента є штучною, то в такому разі справедливо говорити про штучне внутрішньо структуроване хвильове середовище (пружне механічне середовище). Вода або скло не є штучними внутрішньо структурованими субстанціями хвильового середовища, оскільки молекули води природно структуруються завдяки водневим зв’язкам, що виникають між атомами водню та кисню. Так само й сполуки SiO_2 утворюють монокристал (скло) завдяки ковалентним атомарним зв’язкам кремнію та кисню. Сухий лід отримують за штучних умов, але сам по собі діоксид вуглецю утворюється природно (на інших планетах сухий лід існує у відкритому вигляді).

У 2014 р. вченими Національної фізичної лабораторії у Великобританії Surrey NanoSystems на авіасалоні Фарнборо показали матеріал Vanta-Black (назва матеріалу походить від словосполучення Vertically Aligned NanoTube Arrays [1] – вертикально орієнтовані масиви нанотрубок і слова black – чорний). Як випливає з назви, матеріал складається з вертикально орієнтованих вуглецевих нанотрубок. Має низьку питому вагу, поглинає тепло, гідрофобний (водовідштовхувальна властивість), здатний триматися на воді (не тонути) за певної фізико-геометричної конфігурації, має високодобротні міцнісні характеристики, світло, що падає на матеріал, поглинає практично на 99.965 %, тому Vanta-Black відомий як щонайчорніший матеріал. Такий матеріал справедливо називати штучним внутрішньо структурованим матеріалом. І хоча зі зрозумілих причин виробники не розкривають деталі виготовлення матеріалу, проте характер розташування вуглецевих нанотрубок (орієнтація) дає змогу упевнено говорити про штучне походження структури цього матеріалу.

Сьогодні не тільки за допомогою нанотехнологій, але й завдяки 3D-друку можна створювати матеріали зі штучною внутрішньою структурою, які, наприклад, використовують в акустиці для шумоізоляції або шумопоглинання (як-от за аналогією з Vanta-Black, тільки реалізована не світлопоглинальна, а звукопоглинальна функція), – відомий звуковий прожектор Ж. Мемолі, доцента Сассекського університету (Великобританія, 2019 р.). За словами групи розробників, для просторової маніпуляції звукових хвиль використовували матеріали, виконані за допомогою технологій 3D-друку [2]. Отже, протягом науково-технічного прогресу розширюються й можливості реалізовувати структуризацію матеріалів. Так само принцип емерджентності спонукає по-новому подивитися на розв’язання задач про розповсюдження механічних хвиль у середовищах з умовно простими матеріально-геометричними параметрами та відповідно мати обґрунтоване сподівання отримати нові властивості за подальшого поєднання в більш організовані розсіювальні структури [1].

У статті показано, що шарувате строго періодичне середовище (рис. 1) може бути модифіковано за матеріальним і геометричним параметрами. Для реалізації таких модифікацій залучено апарат майже-періодичних функцій (розглянуто плоску необмежену вздовж періодичності модель середовища). Автори роботи вдаються до спроб розв’язати задачу на власні коливання (проблему Штурма-Ліувілля) для модифікованих середовищ у функціональному гільбертовому просторі майже-періодичних функцій (просторі Безіковича). У роботі здійснюються пошуки інваріантних форм дисперсійного рівняння (рівняння, що пов’язує параметри хвильової задачі з умовами розв’язності проблеми Штурма-Ліувілля), записаного для строго періодичного середовища.

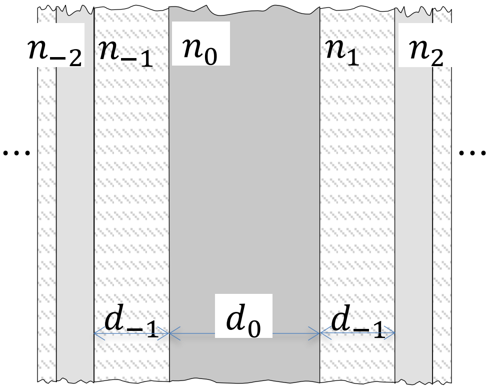

Рис. 1. Модель плоского модифікованого шаруватого середовища

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Роботи [2-4] розвивають інтерес до внутрішньо структурованих середовищ, зокрема відомого з 2014 р. матеріалу Vanta-Black. У роботі [3] розглянуто строго періодичне шарувате середовище, отримано умову розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля, наведено графіки амплітудно-просторових залежностей хвиль Флоке-Блоха. Відправною роботою теперішніх досліджень є робота [4], одним із головних результатів якої є доведення тези про можливість (побудова строго математичного підґрунтя) переходу від необмеженого періодичного середовища до середовища зі скінченною кількістю шарів. У цій роботі також зазначено, що дисперсійне рівняння періодичного середовища може бути записане через розв'язок спектрального диференціального рівняння в проблемі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}} - \frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l} = \frac{1}{\mu}\dot{Z}_\beta\Big|_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} = 0\ ,$$

де Z_β – розв'язок спектрального рівняння;

$(\frac{d}{2} - l,\ \frac{d}{2})$ – інтервал, що відповідає періоду середовища;

$\frac{d}{2}$ – точка, що відповідає межі розподілу шарів строго періодичного середовища;

$\mu\ = \mu(z)$ – скалярна кусково-стала періодична функція просторової змінної $z \in (-\infty, +\infty)$, являє собою матеріальний показник чергового шару – виникає з узгодженням площини коливання та введеної системи координат.

Така форма запису дисперсійного рівняння наштовхує на думку, що деякі властивості розв'язку Z_β перетикатимуть у дисперсійне рівняння. Власне, ідея про пошуки інваріантів для дисперсії походить саме від припущення про існування інваріантів самого розв'язку Z_β.

Перейдемо до проблеми Штурма-Ліувілля. Як відомо, така проблема може бути вирішена як спектральна проблема для лінійного диференціального оператора другого порядку [5, 6]:

$$\mathrm{L}Z = -\beta^2 Z\ , \tag{1}$$

де $z_0\ \in (-\infty, +\infty)$, L – лінійний диференціальний оператор другого порядку;

β – спектральний параметр. Як опорний функціональний простір виберемо гілбертів простір майже-періодичних функцій (простір Безіковича [6]).

Складовою умовою розв'язності проблеми Штурма-Ліувілля є умова самоспряженості диференціального оператора L [5, 7]. Тому постає питання про виділення підпростору, у якому диференціальний оператор L є самоспряженим. Запишемо скалярний добуток двох функцій у просторі Безіковича (скалярний добуток адаптовано до умов вихідної задачі) [6]:

$$(u, v) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{z_0}^{z_0+T} \frac{1}{\mu} u\overline{v}\,\mathrm{d}z \;, \qquad (2)$$

де $z_0 \in (-\infty, +\infty)$ – довільне число;

$\mu = \mu(z)$ – скалярна кусково-стала майже-періодична функція просторової змінної $z \in (-\infty, +\infty)$, являє собою матеріальний показник чергового шару – виникає з узгодженням площини коливання та введеної системи координат.

Якщо говорити про розв'язання відповідного хвильового рівняння методом розділення змінних, то слід зазначити, що проблема Штурма-Ліувілля виникає лише в ортогональних системах координат, тому питання про введення системи координат так чи інакше є одним із відправних пунктів розв'язання хвильової задачі (або задачі на власні коливання). За визначенням, оператор L є самоспряженим у просторі H_0, якщо для будь-якого $u,\ v \in \mathrm{H}_0$ виконується рівність

$$(\mathrm{L}u, v) = (u, \mathrm{L}v).$$

Неважко показати, що

$$(\mathrm{L}u, v) - (u, \mathrm{L}v) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\mu}\dot{u}\overline{v} - u\frac{1}{\mu}\overline{\dot{v}}\right)\Bigg|_{z_0}^{z_0+T}.$$

Справді,

$$(\mathrm{L}u, \overline{v}) = \frac{1}{T}\left[\int_{z_0}^{z_0+T} \left(\frac{1}{\mu}\dot{u}\right)^{\cdot}\overline{v}\;dz + k^2\int_{z_0}^{z_0+T}\overline{v}\,n^2 u\,dz\right],$$

$$(u, \mathrm{L}\overline{v}) = \frac{1}{T}\left[\int_{z_0}^{z_0+T} u\overline{\left(\frac{1}{\mu}\dot{v}\right)^{\cdot}}\,dz + k^2\int_{z_0}^{z_0+T}\overline{v}\,n^2 u\,dz\right].$$

Оскільки (інтегруємо частинами)

$$\int_{z_0}^{z_0+T}\left(\frac{1}{\mu}\dot{u}\right)^{\cdot}\overline{v}\;dz = \frac{1}{T}\frac{1}{\mu}\dot{u}\overline{v}\Bigg|_{z_0}^{z_0+T} - \frac{1}{T}\int_{z_0}^{z_0+T}\frac{1}{\mu}\dot{u}\,d\overline{v}\,,$$

$$\int_{z_0}^{z_0+T} u\overline{\left(\frac{1}{\mu}\dot{v}\right)^{\cdot}}\,dz = \frac{1}{T}u\frac{1}{\mu}\overline{\dot{v}}\Bigg|_{z_0}^{z_0+T} - \frac{1}{T}\int_{z_0}^{z_0+T}\frac{1}{\mu}\overline{\dot{v}}\,du,$$

то

$$(\mathrm{L}u, v) - (u, \mathrm{L}v) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\mu}\dot{u}\overline{v} - u\frac{1}{\mu}\overline{\dot{v}}\right)\Bigg|_{z_0}^{z_0+T}.$$

Отримали умову щодо функцій, для яких оператор є самоспряженим.

Визначення мети та завдання дослідження. Авторам цікаво розглянути і кількісно дослідити поведінку механічних хвиль у середовищах, які передбачено є модифікацією строго періодичного середовища. По-перше, ідея полягає в тому, щоб інтеграл у скалярному добутку подати як

$$(u, v) = \frac{1}{T_n} \sum_{m=0}^{n} \int_{T_{m-1}}^{T_m} \frac{1}{\mu} u\bar{v}\, dz = 0,$$

де $T_n = l_n + T_{n-1}$, $T_0 = z_0$, l_n – часткові періоди в точці z_0, $n = 1, 2, \dots$.

Це можливо, адже границя, за Гейне, означає, що будь-яка послідовність τ_n така, що $\tau_n \to \infty$ дає границю

$$\frac{1}{\tau_n} \int_{z_0}^{z_0+\tau_n} \frac{1}{\mu} u\bar{v}\, dz \to (u, v).$$

Зокрема, за $\tau_n = T_n$ і з урахуванням адитивності інтеграла записуємо

$$(\mathrm{L}u, v) = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{z_0}^{z_0+T} \frac{1}{\mu} u\bar{v}\, dz = \frac{1}{T_n} \sum_{m=0}^{n} \int_{T_{m-1}}^{T_m} \frac{1}{\mu} u\bar{v}\, dz\,.$$

Звідси виникає надія про виконання умов самоспряженості диференціального оператора L і можливість отримання розв'язків проблеми Штурма-Ліувілля у виділеному підпросторі H_0 опорного простору H. За припущенням авторів, кожен доданок $I_m(\beta) = \frac{1}{\mu}\dot{u}_\beta\Big|_{T_{m-1}}^{T_m}$ наступної суми є досить близьким до нуля, а повна сума, яка в ідеалі є нескінченною сумою, має дорівнювати нулю:

$$\frac{1}{T_n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\mu} \dot{u}_\beta \Big|_{T_{m-1}}^{T_m} = 0\,.$$

Тобто припущення полягає в тому, щоб досягти виконання умови

$$\frac{1}{T_n} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{1}{\mu} \dot{u}\bar{v} - u \frac{1}{\mu} \dot{\bar{v}} \right) \Big|_{T_{m-1}}^{T_m} = 0,$$

або

$$(\mathrm{L}u, v) - (u, \mathrm{L}v) = 0.$$

Остання рівність означає, що оператор L є самоспряженим. Маємо простір, у якому оператор L є самоспряженим:

$$\mathrm{H}_0 = \left\{ u \in \mathrm{H}, \frac{1}{\mu} \dot{u}_\beta \Big|_{T_{m-1}}^{T_m} \approx 0,\ \ m = 0,1, \dots \right\}.$$

Функції знов побудованого простору існують H_0 як майже-періодичні.

Основна частина дослідження. Побудуємо два модельних приклади. Як було показано в роботі [4], задача на власні коливання для шаруватого строго періодичного середовища (плоска модель) ніби розпадається на відповідні незалежні задачі на кожному окремому шарі. Ця обставина наштовхує на думку про існування можливості модифікувати середовище. Побудова першого модельного прикладу полягає у зміні матеріального параметра n_m. Як виявилося, така модифікація не призводить до значної зміни самої функції-розв'язку u_β і дисперсійної залежності $I_m(\beta)$ (за спектральним параметром β) (рис. 2).

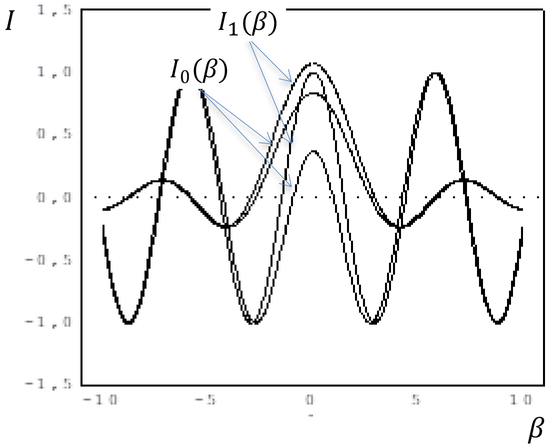

Рис. 2. Дисперсійні криві $I_0(\beta)$, $I_1(\beta)$, які відповідають двом сумежним шарам (модельний приклад 1, переставлено 2-і модифікації за матеріальним параметром)

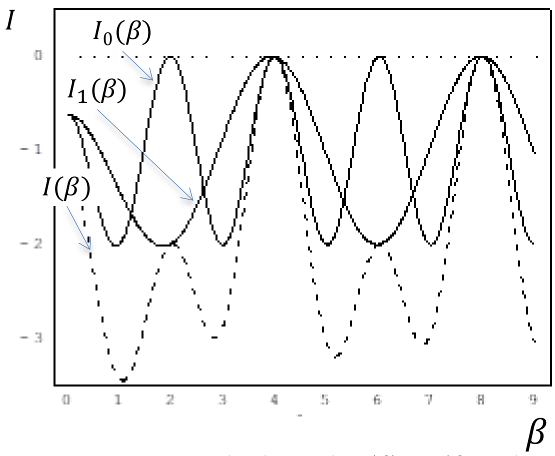

Рис. 3. Дисперсійні криві $I_0(\beta)$, $I_1(\beta)$, які відповідають двом сумежним шарам (суцільні лінії), $I(\beta) = I_0(\beta) + I_1(\beta)$ – результіруюча дисперсіна крива (пунктирна лініїя)

Інша думка полягає у спробах зрозуміти (другий модельний приклад), чи можливі інваріанти дисперсійних залежностей $I_0(\beta) = \frac{1}{\mu}\dot{u}_\beta\Big|_{T_0}^{T_1}$, $I_1(\beta) = \frac{1}{\mu}\dot{u}_\beta\Big|_{T_1}^{T_2}$, записаних відповідно для двох суміжних шарів ($m = 0, 1$). Дивлячись на останню форму запису дисперсійних залежностей, неважко дійти висновку, що інваріанти самого розв'язку u_β спектрального рівняння (1) можуть виявитися й інваріантами дисперсійних рівнянь $I_0(\beta)$, $I_1(\beta) = 0$. Звісно, прикладів яких-небудь інваріантних форм навести нескладно, припустимо, змінити матеріальний параметр n, а разом із тим і частотний параметр k так, щоб добуток kn не змінився. Але, схоже, корисних інваріантів для розв'язання вихідної спектральної проблеми вказати не вдається. Проте, якщо долучити апарат майже-періодичних функцій, побачити дещо схоже на інваріантні значення розв'язку u_β усе ж таки можливо. Нехай $\beta = \beta_p$, (p – деякий цілий індекс), тоді з переходом у геометричному параметрі від d до $2d$ і в матеріальному параметрі від n_0 до $n_1 = \frac{n_0}{2}$ матимемо $u_{\beta_p}(n_0, d) = u_{\frac{1}{2}\beta_p}(n_1, 2d)$ (тут для визначеності узято два суміжних шари за $m = 0, 1$). Зокрема, якщо β_p – корені рівняння $I_0(\beta) = 0$, то $\frac{1}{2}\beta_p$ є коренями рівняння $I_1(\beta) = 0$.

Якби функція u_β була б строго періодичною (за спектральним параметром β), то $\beta_p = \beta_0 + pl$, (l – період) і тоді мали

$$I_1(\tfrac{1}{2}\beta_p) \equiv I_1(\tfrac{1}{2}\beta_0 + \tfrac{1}{2}pl) \equiv I_1(ql + sl) = 0$$

(за умови, що β_0 пропорційне періоду l: $\beta_0 = ql$, q – ціле, $s = \frac{1}{2}p$). У цьому випадку значення були б

$$I(\tfrac{1}{2}\beta_p) = I_0(ql + sl) + I_1(ql + sl),$$

тобто за парних значень індексу p, q мали б такі β, які були б коренями як рівняння $I_0(\beta) = 0$, так і рівняння $I_1(\beta) = 0$, а отже, і рівняння $I(\beta) \equiv I_0(\beta) + I_1(\beta) = 0$ (рис. 3). Якби така логіка була дійсною, то значенням спектрального параметра β_p, що відповідають парним індексам p, q, відповідали б власні функції u_{β_p} (власні коливання) двох суміжних шарів ($m = 0, 1$). Але дійсність є дещо складнішою.

Втім, залучаючи апарат майже-періодичних функцій, значення параметра β_p справедливо називати майже-коренями. У реальності $\beta_p \approx \beta_0 + pl$ – рівність буде виконуватися наближено. Тож для двох суміжних шарів маємо спектральну залежність $I(\beta) = I_0(\beta) + I_1(\beta)$. Стає зрозумілим, що в термінах майже-періодичних функцій числа β_p, які є точними коренями спектрального рівняння $I(\beta) = 0$, є майже-коренями відповідно рівнянь $I_0(\beta)$, $I_1(\beta) = 0$, тобто відповідні розв’язки u_{β_p} спектрального рівняння (1) належать простору H_0, у якому диференціальний оператор L є самоспряженим, а отже, розв’язки спектрального рівняння u_{β_p} є власними функціями спектральної проблеми (1) (власними коливаннями середовища, яке являє собою поєднання шарів з індексами $m = 0, 1$).

На рис. 3 подано графіки двох дисперсійних кривих

$$I_0(\beta) = \frac{1}{\mu}\dot{u}_\beta\Big|_{T_0}^{T_1},\; I_1(\beta) = \frac{1}{\mu}\dot{u}_\beta\Big|_{T_1}^{T_2},$$

що відповідають суміжним шарам (абсцис – значення спектрального параметра β, ординат – дисперсія). Із рисунка видно, що залежність $I(\beta) = I_0(\beta) + I_1(\beta)$ наближено обертається в нуль (пунктир) у точках, де відповідно обертаються в нуль залежності $I_0(\beta)$, $I_1(\beta)$, тобто ці точки є майже-коренями залежності $I(\beta)$, отже, розв’язки спектрального рівняння (1), які відповідають цим кореням, належать простору H_0 і є власними функціями.

Висновки. У роботі було розглянуто два модельних приклади (плоска модель середовища). У першому розглянуто модифікацію строго періодичного середовища за матеріальним параметром. У другому прикладі розглянуто середовище, у якому модифікуються матеріальний і геометричний параметри (довжина шару). Для обох прикладів формулюють і розв’язують задачу на власні коливання. Спектральну проблему Штурма-Ліувілля розв’язують у функціональному гілбертовому просторі майже-періодичних функцій (просторі Безіковича).

У першому модельному прикладі реалізовано модифікацію, у якій хвильове середовище залишається необмеженим. Тут зміна матеріального параметра не призводить до сильної зміни дисперсійної залежності, записаної для окремого шару. Розглянута у другому модельному прикладі модифікація менш очевидна та, на думку авторів, заслуговує на більшу увагу. У вигляді графіків для цих прикладів також було подано дві дисперсійні залежності відповідно двох суміжних шарів. На графіках наочно визначено зв'язок між коренями цих двох дисперсій. З побудовою другого модельного прикладу розвивається ідея про існування можливих інваріантних форм дисперсійного рівняння, записаного для окремо вибраних шарів. У ході досліджень з’ясовано, що знайти інваріанти в повному розумінні цього терміна, як здається натепер, неможливо. Утім, залучаючи апарат майже-періодичних функцій, усе ж таки вдається вказати окремі точки – значення спектрального параметра β, для яких справджується точкова інваріантність: $I_0(\beta_p) = I_1(\frac{1}{2}\beta_p)$ (p – цілий індекс). Намагаючись розповсюдити отриманий результат на середовище з нескінченною кількістю шарів, така ідея стикається з труднощами – перший корінь дисперсійного рівняння виявляється нескінченно віддаленим (з додаванням чергового шару до середовища перший корінь зростає), у зв'язку з чим автори обмежуються лише декількома шарами для матеріального $n_m = 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}$ і геометричного параметрів $d = .25, .5, 1, 2, 4$ (m – індекс, що характеризує номер шару, $m = 0, 1, 2, 3, 4$).

Список використаних джерел

1. Arnold Adams, Fred Nicol, Steve McHugh, John Moore, Gregory Matis, Gabriel A. Amparan. Vantablack properties in commercial thermal infrared imaging systems. Proc. SPIE 11001, Infrared Imaging Systems: Design, Analysis, Modeling, and Testing XXX, 110010W (14 May 2019). URL: https://doi.org/10.1117/12.2518768.
2. Morozov G. V., Sprung D. W. L. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystals. *EPL (Europhysics Letters).* 2011. Nov. 22; 96(5): 54005. URL: https://doi.org/10.1209/0295-5075/96/54005.
3. Mimoli G. A transfer matrix method for calculating the transmission and reflection coefficient of labyrinthine metamaterials. The Journal of the Acoustical Society of America. 151, 1022 (2022). doi: 10.1121/10.0009428.
4. Казанко О. В., Пєнкіна О. Є. Розповсюдження механічних хвиль у двовимірному шаруватому середовищі. *Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту*. Харків: УкрДУЗТ, 2023. Вип. 205. С. 25-36.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 512 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: учеб. пособ. Изд. 6-е, испр. и доп. Москва: Издательство МГУ, 1999. 742 с.
7. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах: книга для специалистов, аспирантов математ. специальностей. Изд. 2-е. Москва: Наука, 1966. 544 с.
8. Eastham M. S. P. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press, 1973. 130 p.
9. Winkler S., Magnus W. Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons, 1996. 135 p.
10. Левитан Б. М. Почти-периодические функции: монография. Москва: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953. 396 с.
11. Казанко О. В., Пєнкіна О. Є. Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по подовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого рівняння по подовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. *Збірник наукових праць ΛΌΓΟΣ*. 2020. С. 126-130.
12. Казанко О. В., Пєнкіна О. Є. Норма власних функцій одновимірного фотонного кристала. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка»*. 2021. № 35. С. 86-93. URL: https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08.

13. Казанко О. В., Пєнкіна О. Е. Розповсюдження плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі у двовимірному однорідному ізотропному середовищі з дискретною будовою. *Матеріали IV Міжнародної науково-технічної конференції «Прикладні науково-технічні дослідження».* Івано-Франківськ, 2020. Т. 1. С. 122-124.

Казанко Олександр Віталійович, асистент кафедри обчислювальної техніки та систем управління, Український державний університет залізничного транспорту. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9202-8008.
Тел.: +38 (057) 730-10-40. E-mail: kazanko@kart.edu.ua.
Пєнкіна Ольга Євгеніївна, старший викладач кафедри обчислювальної техніки та систем управління, Український державний університет залізничного транспорту. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9804-6685.
Тел.: +38 (057) 730-10-40. E-mail: penkina@kart.edu.ua.

Kazanko Alexander, Assistant, Department of Computer Engineering and Control Systems, Ukrainian State University of Railway Transport. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9202-8008. Tel.: +38 (057) 730-10-40.
E-mail: kazanko@kart.edu.ua.
Penkina Olga, Senior Lecturer, Department of Computer Engineering and Control Systems, Ukrainian State University of Railway Transport. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9804-6685. Tel.: +38 (057) 730-10-40.
E-mail: penkina@kart.edu.ua.

Статтю прийнято 10.12.2024 р.