

УДК 624.042:624.046:624.072

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНА МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ У ПЕРЕРІЗАХ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Інженер-програміст А. В. Томашевський

NUMERICAL-ANALYTICAL TECHNIQUE FOR DETERMINING INTERNAL FORCES IN CROSS-SECTIONS OF BUILDING STRUCTURES

Software engineer A. V. Tomashevskiy

DOI: <https://doi.org/10.18664/1994-7852.211.2025.327330>



Анотація. У статті розглянуто чисельно-аналітичну методику визначення внутрішніх зусиль у перерізах будівельних конструкцій, модельованих сукупністю скінченних елементів. Робота таких конструкцій може бути подібною до роботи стрижнів, або їхній напружено-деформований стан можна оцінити через стрижневі зусилля в їхніх перерізах. Для обчислення внутрішніх зусиль у перерізах, складених із декількох вузлів моделі та скінченних елементів, що примикають, застосовують вузлові реакції — зусилля, що виникають у вузлах від дії елементів. Вузлові реакції підсумовують з вибраних скінченних елементів і вузлів по площі складеного перерізу та приводять до необхідної системи координат. Одержані внутрішні зусилля можна використовувати як самостійні дані для аналізу, так і вихідні дані для розрахунків конструювання: оцінювання несучої здатності та експлуатаційної придатності конструкцій, підбору армування, характеристик перерізів тощо. Наведено приклади реалізації запропонованої методики в системах ПК ЛІРА-САПР — «Кам'яні та армокам'яні конструкції» і «Стрижневі аналоги», результати розрахунку верифікаційних задач, продемонстровано приклади практичного застосування запропонованої методики в розрахункових скінченно-елементних моделях.

Ключові слова: метод скінченних елементів, внутрішні зусилля, вузлові реакції, моделювання конструкцій, стрижневі аналоги, напружено-деформований стан, чисельні методи.

Abstract. This paper presents a numerical-analytical technique for determining internal forces in cross-sections of building structures that are modeled using finite element methods (FEM). The study focuses on structural components that, despite being represented by a set of finite elements of different dimensions (beam, plate, and volumetric elements), exhibit behavior similar to bar-like structures: pilons, short piers, lintels, deep beams, prefabricated floor slabs, wall panels, diaphragms, core walls.

The methodology is based on summing nodal reactions from selected finite elements over a defined cross-section and transforming these forces into a chosen coordinate system. The proposed approach allows for determining internal forces in sections composed of multiple nodes and adjacent finite elements, ensuring consistency with engineering analysis and design principles. The results obtained through this approach can be used as standalone data for evaluating structural behavior or as input for further design calculations, including load-bearing capacity assessments, serviceability limit state verification, reinforcement calculation, and cross-section parameter determination.

The implementation of this method in the LIRA-SAPR software system is discussed in detail. It is integrated into two subsystems: "Stone and Reinforced Masonry Structures" and "Bar Analogues".

To validate the accuracy and applicability of the method, several verification problems are presented. These include structural models analyzed using beam elements, shell elements, and solid finite elements, with the computed internal forces being compared against theoretical values derived from classical mechanics of materials. The study demonstrates that the numerical-analytical approach produces results that are highly consistent with traditional beam theory calculations, confirming its validity for practical engineering applications.

One of the key advantages of this approach is its ability to keep the structural integrity of the original finite element model while allowing engineers to obtain results in a format that aligns with standard design practices. Unlike traditional stress integration methods, which can be affected by local stress concentrations and numerical inaccuracies, the use of nodal reactions provides a more robust and reliable means of extracting internal forces from FEM models. Despite its advantages, the method requires careful selection of finite elements and nodal regions to ensure accurate force summation. The automation of this process within the LIRA-SAPR software significantly simplifies the task, providing engineers with an efficient tool for evaluating internal forces in complex structures.

In conclusion, this numerical-analytical technique offers a powerful tool for engineers and researchers involved in structural analysis using finite element methods. Its integration into commercial structural engineering software ensures practical usability and efficiency, making it an essential advancement for modern engineering practice.

Key words: finite element method, internal forces, nodal force reactions, modeling of structures, bar analogues, stress-strain state, numerical methods.

Постановка проблеми. Для моделювання роботи будівельних конструкцій методом скінченних елементів використовують скінченні елементи різної розмірності: стрижневі, пластинні та об'ємні. Певний тип скінченного елемента вибирають на основі різних міркувань: по-перше, слід забезпечити достатній рівень відповідності між математичною моделлю й дійсною роботою модельованої конструкції в заданих умовах; по-друге, вибирають на користь скінченних елементів, прийнятних для формування коректного вузла примикання до інших елементів і зручних для збирання навантажень і аналізу результатів; по-третє, сучасні інтегровані програмні комплекси будівельного призначення також використовують внутрішні зусилля в скінченних елементах, обчислені в результаті скінченно-елементного аналізу, для виконання інших прикладних розрахунків: розрахунків за міцністю, стійкістю, і конструктивних розрахунків залізобетонних, сталевих і армокамі'яних конструкцій.

Існують будівельні конструкції, модельовані через зазначені вище причини набором скінченних елементів різної розмірності, проте за характером своєї роботи в певних умовах подібні до стрижнів. До таких конструкцій належать, наприклад, пілони, короткі простінки, перемички, балки-стілки, збірні плити перекриттів, стінові панелі, діафрагми, ядра жорсткості будівель і т. п. Поперечні перерізи цих конструкцій будуть подані в розрахункових моделях як сукупність скінченних елементів і вузлів. Називатимемо такі поперечні перерізи складеними. Для докладного аналізу цих конструкцій корисно (а для деяких прикладних розрахунків необхідно) визначити внутрішні зусилля в їхніх складених поперечних перерізах аналогічно зусиллям у поперечних перерізах стрижнів. У статті запропоновано чисельно-аналітичну методику визначення внутрішніх зусиль у перерізах конструкцій, модельованих сукупністю скінченних елементів, впроваджену в ПК ЛІРА-САПР [1].

Сутність методики. Основа пропонованої методики визначення внутрішніх зусиль полягає у використанні вузлових реакцій скінченних елементів для одержання інтегрованих зусиль із декількох скінченних елементів, що утворюють складений переріз будівельної конструкції. Такі скінченні елементи мають знаходитися по один бік від площини складеного перерізу та примикати до неї одним або кількома вузлами.

Під вузовими реакціями (вузовими зусиллями) скінченного елемента розуміють результуючу силу та результуючий момент, прикладені у вузлі елемента, що являють собою вплив певного елемента на конкретний вузол моделі. Вектор вузових

реакцій i -го скінченного елемента обчислюють за формулою

$$\{R_i\} = K_i \cdot \{U_i\}, \quad (1)$$

де K_i — матриця жорсткості i -го скінченного елемента;

U_i — вектор переміщень вузлів, що належать до i -го скінченного елемента.

Для визначення інтегрованих внутрішніх зусиль у складеному перерізі, утвореному n вихідними вузлами та m елементами, слід обчислити сумарні вузові реакції R_c та M_c , що виникають у цих вузлах від таких елементів, приведені до вибраної системи координат складеного перерізу (рис. 1).

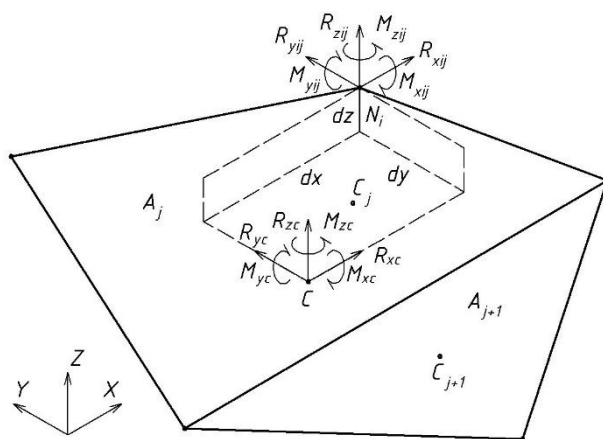


Рис. 1. Обчислення внутрішніх зусиль у складеному перерізі

Початком системи координат C складеного перерізу може бути будь-яка точка в площині перерізу, осі X та Y будуть розташовані в площині перерізу, а вісь Z — по нормалі до площини. Система координат може бути вибрана відповідно до потреб розрахунку. На практиці початок системи координат доцільно за замовчуванням розташовувати в геометричному центрі складеного перерізу, а напрями осей будуть залежати від особливостей програмної реалізації.

Геометричний центр складеного перерізу можна наближено визначити на основі площ примикання A_j з центрами тяжіння $(x_j; y_j; z_j)$ вихідних скінченних елементів до площини складеного перерізу: для стрижня площу його примикання розраховують на основі площі перерізу, для пластини — на основі товщини пластини та відстані між вузлами, для об'ємного СЕ — як площа грані, що прилягає до площини складеного перерізу.

$$x_c = \frac{\sum_{j=1}^m (A_j x_j)}{\sum_{j=1}^m A_j}; \quad y_c = \frac{\sum_{j=1}^m (A_j y_j)}{\sum_{j=1}^m A_j}; \quad z_c = \frac{\sum_{j=1}^m (A_j z_j)}{\sum_{j=1}^m A_j}. \quad (2)$$

Вузлові реакції від вихідних елементів — R_{ij} та M_{ij} — у складеному перерізі підсумовують з урахуванням плеча d між

точкою вузла N_i і початком системи координат перерізу C .

$$d_x = x_i - x_c; \quad d_y = y_i - y_c; \quad d_z = z_i - z_c; \quad (3)$$

$$R_{xc} = \sum_{i=1}^n R_{xij}; \quad R_{yc} = \sum_{i=1}^n R_{yij}; \quad R_{zc} = \sum_{i=1}^n R_{zij}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_{xc} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{xij} - R_{yij} d_z + R_{zij} d_y); \\ M_{yc} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{yij} - R_{zij} d_x + R_{xij} d_z); \\ M_{zc} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{zij} - R_{xij} d_y + R_{yij} d_x). \end{aligned} \quad (5)$$

Відповідно до правила знаків і положення вихідних скінченних елементів (уздовж або проти нормалі до площини перерізу) сумарні вузлові реакції слід залишити з тим самим знаком або змінити його на протилежний. Для повороту вузлових реакцій у напрямках осей вибраної системи координат можна застосувати матрицю перетворення до результуючої сили реакції та результуючого моменту реакції.

Реалізація методики в ПК ЛПА-САПР. Запропонована методика визначення внутрішніх зусиль реалізована в ПК ЛПА-САПР у роботі двох її систем: «Кам'яні та армокам'яні конструкції» і «Стрижневі аналоги».

Для системи «Кам'яні та армокам'яні конструкції» розраховано внутрішні зусилля в поперечних перерізах простінків.

Ці складені перерізи формуються у горизонтальній площині на заданих користувачем рівнях для конструкцій стін, змодельованих пластинами. Внутрішні зусилля, обчислювані в глобальній системі координат, являють собою як самостійні дані для аналізу, так і вихідні дані для подальших автоматизованих розрахунків кам'яних і армокам'яних конструкцій.

Більш універсальні можливості для аналізу та конструювання різних будівельних конструкцій, робота яких подібна до роботи стрижнів, надає система «Стрижневі аналоги» [2].

Стрижневий аналог (рис. 2) — це група скінченних елементів і їхніх вузлів, логічно пов'язаних певним правилом, що визначає особливий алгоритм обчислення внутрішніх зусиль у певному стрижневому скінченному елементі. Цей стрижневий

скінченний елемент називають цільовим стрижнем.

Для визначення зусиль у розрахункових перерізах цільового стрижня задано набори вузлів та елементів, що утворюють плоскі складені перерізи аналізованої конструкції. Такі вузли та елементи називають вихідними об'єктами стрижневого аналога.

Внутрішні зусилля в розрахункових перерізах цільового стрижня обчислюють не на основі переміщень його вузлів, а підсумовуванням вузлових реакцій від наборів вибраних скінченних елементів. Передбачають, що кожен такий набір скінченних елементів формує складений поперечний переріз аналізованої конструкції, а вузли, реакції в яких підсумовують, лежать у площині цього

перерізу. Такі вузли та елементи називатимемо вихідними об'єктами стрижневого аналога.

До набору вихідних об'єктів, що утворює складений переріз, включають вузли, які лежать у площині цього перерізу, і скінченні елементи, які примикають до площини перерізу вузлами: одновузлові СЕ — безпосередньо, стрижні — одним вузлом, пластини — одним вузлом або двома вузлами на ребрі, об'ємні СЕ — одним вузлом, двома вузлами на ребрі або кількома вузлами на одній грані. Вихідними скінченними елементами стрижневого аналога можуть бути стрижневі, пластинні, об'ємні скінченні елементи, спецементи, а також комбінації з них. При цьому вихідні елементи і вузли можуть бути такими для кількох стрижневих аналогів.

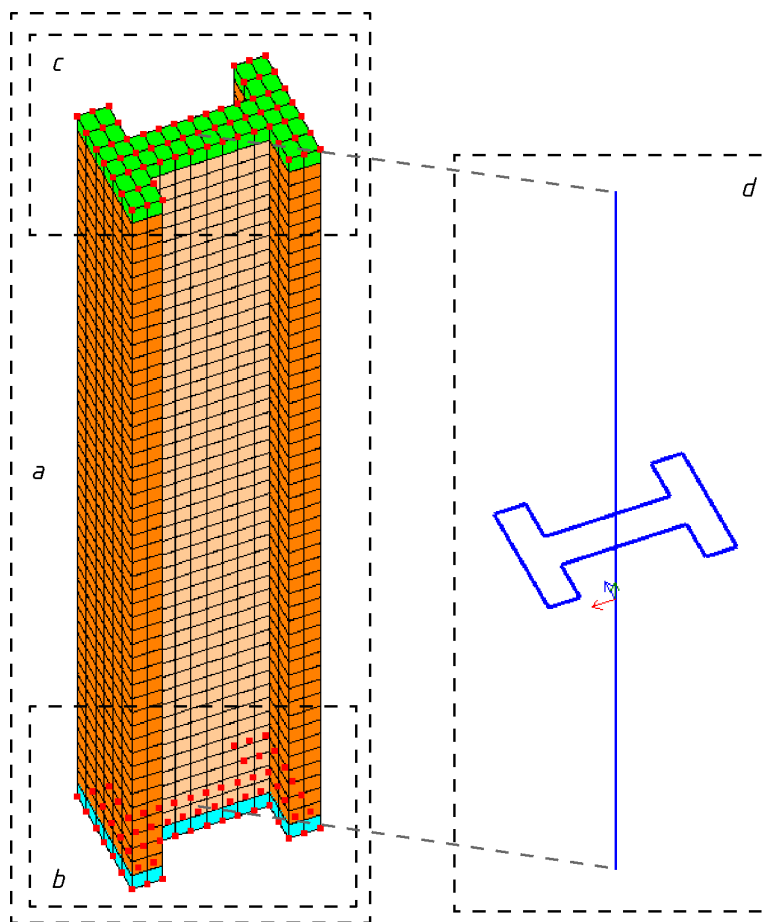


Рис. 2. Стрижневий аналог: а – вихідні об'єкти моделі; б – вузли та елементи початкового перерізу; с – вузли та елементи кінцевого перерізу; d – цільовий стрижень

Цільовий стрижень має два розрахункові перерізи — на початку та наприкінці. Якщо для аналізу складеної конструкції потрібна більша кількість розрахункових перерізів по її довжині, то необхідно створити ланцюжок із кількох стрижневих аналогів. Цільовий стрижень має знаходитися в певному положенні відносно аналізованої складеної конструкції: площини його початкового та скінченного розрахункових перерізів мають збігатися з відповідними площинами вихідних складених перерізів конструкції. Цільовий стрижень може бути двовузловим скінченим елементом будь-якого типу, крім спеціальних, що дає змогу розв'язувати задачі з різними ознаками схеми в плоскій і просторовій постановці. За замовчуванням під час створення стрижневого аналога застосовано тип СЕ 10 — універсальний просторовий стрижневий СЕ.

Вузлові реакції у вихідних вузлах від вихідних елементів стрижневого аналога підсумовують у кожному складеному перерізі відносно його геометричного центра та приводять до місцевої системи координат розрахункового перерізу цільового стрижня.

Розрахунок стрижневих аналогів відбувається за повного розрахунку моделі на його фінальному етапі. Результатом розрахунку стрижневих аналогів є внутрішні зусилля в розрахункових перерізах цільових стрижнів, обчислені окремо за всіма завантаженнями. Ці внутрішні зусилля слід сприймати як додаткове дискретне стрижнєве подання силових факторів, що виникають у вихідних складених перерізах, а не власні зусилля у цільових стрижнях. З цієї дискретності випливає, що отримані внутрішні зусилля не слід інтерполювати за довжиною цільового стрижня, вони справедливі лише в точках його початкового і кінцевого розрахункових перерізів. Це слід ураховувати під час перегляду результатів розрахунку у вигляді епюр чи використовувати графічне подання

зусиль у вигляді мозаїк та / або в табличному вигляді.

Обчислені внутрішні зусилля в перерізах цільового стрижня далі використовують для визначення зусиль за розрахунковими сполученнями навантажень і зусиль, а також у роботі систем конструювання. Цільові стрижні при цьому нічим не відрізняються від інших скінчених елементів з точки зору постпроцесорів: зокрема, для них можна використовувати поєднання в конструктивні елементи, задавання правил уніфікації тощо.

Стрижневі аналоги в ПК ЛІРА-САПР можна застосовувати для визначення внутрішніх зусиль:

- у лінійних статичних і динамічних розрахунках, зокрема методом прямого нелінійного інтегрування (динаміка в часі) [3];
- нелінійних розрахунках на останній стадії прикладання навантаження (повне навантаження) [3];
- розрахунках за методиками інженерної нелінійності [4, 5];
- нелінійних розрахунках із змінною розрахунковою схемою (моделювання процесів монтажу та демонтажу) за умови, що всі вихідні елементи стрижневого аналога мають однакові стадії монтажу та демонтажу (цільові стрижні рекомендовано не включати в процес зміни розрахункової схеми або включати в ті самі стадії монтажу та демонтажу, що й вихідні об'єкти відповідних стрижневих аналогів) [6, 7].

Важливим аспектом застосування цього інструменту для масового проєктування є можливість автоматизованої генерації стрижневих аналогів: для цього аналізують вихідні вузли та скінченні елементи конструкції, визначають їхню належність до площин початкового та кінцевого перерізів стрижневих аналогів, генерують цільові стрижні стрижневих аналогів у відповідних положеннях та, за можливості, автоматизовано призначають поперечні перерізи відповідних форм і розмірів для цільових стрижнів.

Верифікаційні задачі. Розглянемо приклади верифікаційних задач, які можуть проілюструвати роботу наведеної методики обчислення внутрішніх зусиль у ПК ЛІРА-САПР.

Задача 1. Дано вертикальний консольний стрижень квадратного поперечного перерізу, навантажений поздовжнім і поперечними зосередженими навантаженнями на вільному кінці (рис. 3).

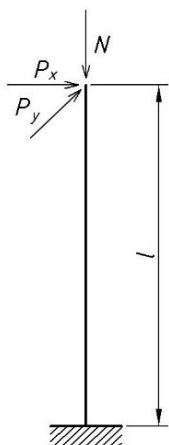


Рис. 3. Розрахункова схема до задачі 1

Модуль пружності $E = 3.0 \cdot 10^7$ Па; коефіцієнт Пуассона $\mu = 0.2$; висота стрижня $l = 10$ м; розміри поперечного перерізу $b = h = 0.5$ м; зосереджена сила, що діє вздовж осі X, $P_x = 10$ кН; зосереджена сила, що діє вздовж осі Y, $P_y = 10$ кН; зосереджена

сила, що діє вздовж осі Z, $N = 10000$ кН. Необхідно визначити внутрішні зусилля в опорному поперечному перерізі стрижня.

Розв'язання задачі наведено в роботі [8]. За недеформованих схем поздовжня сила від вертикального навантаження, а також поперечні сили та згинальні моменти від горизонтальних навантажень обчислюють за формулами

$$N(0) = N;$$

$$Q_x(0) = P_x; \quad Q_y(0) = P_y; \quad (6)$$

$$M_x(0) = P_y l; \quad M_y(0) = P_x l.$$

Розраховуючи в ПК ЛІРА-САПР, розглядають три розрахункові моделі, виконані зі скінченних елементів різних типів: стрижневих СЕ 10 (універсальний просторовий стрижневий СЕ); оболонкових СЕ 48 (універсальний чотирикутний СЕ оболонки з проміжними вузлами на сторонах); об'ємних СЕ 35 (універсальний просторовий восьмивузловий ізопараметричний СЕ з проміжними вузлами на сторонах). У моделях із оболонкових СЕ використано сітку 4×10 СЕ, а з об'ємних — сітку $4 \times 4 \times 10$ СЕ; також створено стрижневі аналоги для визначення зусиль.

Результати розрахунку подано в табл. 1. Зусилля в цільових стрижнях стрижневих аналогів відповідають зусиллям, обчисленим за моделлю зі стрижневих СЕ 10.

Таблиця 1

Результати розрахунку задачі 1

Шукана величина	Рішення для стрижня	Рішення з використанням стрижневих аналогів	
Поздовжня сила $N(0)$, кН	10000.00	СЕ 48	10000.00
		СЕ 35	10000.00
Поперечні сили $Q_x(0)$, $Q_y(0)$, кН	10.00	СЕ 48	10.00
		СЕ 35	10.00
Згинальні моменти $M_x(0)$, $M_y(0)$, кН·м	100.00	СЕ 48	100.00
		СЕ 35	100.00

Задача 2. Дано затиснену по кінцях балку, завантажену рівномірно розподіленим навантаженням q (рис. 4). Модуль пружності $E = 3.0 \cdot 10^7$ Па; коефіцієнт Пуассона $\mu = 0.2$; довжина балки

$l = 2.4$ м; ширина поперечного перерізу $b = 0.2$ м; висота поперечного перерізу $h = 0.3$ м; навантаження $q = 10$ кН/м. Необхідно визначити внутрішні зусилля у характерних точках балки.

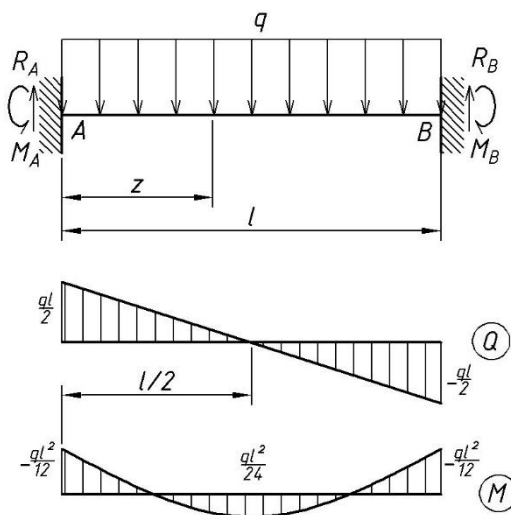


Рис. 4. Розрахункова схема до задачі 2

Розв'язання задачі подано в роботі [8]. Опорні реакції R_A , R_B , M_A , M_B , поперечна сила Q , згинальний момент M , внутрішні

зусилля в характерних перерізах обчислюють за формулами

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}; \quad M_A = M_B = \frac{ql^2}{12};$$

$$0 \leq z \leq l:$$

$$Q(z) = \frac{ql}{2} \left(1 - 2 \frac{z}{l} \right); \quad Q(0) = \frac{ql}{2}; \quad Q(l) = -\frac{ql}{2};$$

$$M(z) = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{6} \right); \quad M(0) = M(l) = -\frac{ql^2}{12}; \quad M(l/2) = \frac{ql^2}{24}.$$
(7)

Розраховуючи в ПК ЛІРА-САПР, розглядають кілька розрахункових моделей, виконаних зі скінченних елементів різних типів: стрижневих СЕ 10 (універсальний просторовий стрижневий СЕ), пластинних СЕ 21 (прямокутні СЕ плоскої задачі (балка-стінка)) і пластинних СЕ 28 (прямокутні СЕ

плоскої задачі (балка-стінка) з проміжними вузлами на сторонах). У моделях із пластинних СЕ використано сітку 16×6 СЕ, також створено стрижневі аналоги для визначення зусиль.

Результати розрахунку подано в табл. 2. Зусилля в цільових стрижнях

стрижневих аналогів достатньою мірою відповідають зусиллям, обчисленим за

відповідними моделями зі стрижневих СЕ 10.

Таблиця 2

Результати розрахунку задачі 2

Шукана величина	Рішення для стрижня	Рішення з використанням стрижневих аналогів	
Поперечна сила на опорі А, кН	12.00	СЕ 21	12.00
		СЕ 28	12.00
Згинальний момент на опорі А, кН·м	-4.80	СЕ 21	-4.77
		СЕ 28	-4.79
Згинальний момент у середній точці прогону, кН·м	2.40	СЕ 21	2.43
		СЕ 28	2.41

Приклади застосування методики за допомогою ПК ЛІРА-САПР. Для моделювання конструкцій багатопверхових монолітних залізобетонних будівель для аналізу внутрішніх зусиль у пілонах, балках-стінках, областях стін над і під прорізами, ребрах плит чи контурних балках, що працюють сумісно з плитою, можуть бути застосовані стрижневі аналоги. Такі конструкції моделюють переважно пластинними скінченними елементами, що

дає змогу адекватно передати їхню жорсткість у складі всієї будівлі, а також забезпечити коректні стики примикання конструкцій одна до одної. Стрижневі аналоги таких конструкцій дають змогу зберегти переваги їх моделювання пластинами і одержати додаткове подання цих конструкцій у вигляді стрижнів зі подальшим визначенням внутрішніх зусиль у формі, зручній для прикладних розрахунків на міцність та експлуатаційну придатність (рис. 5).

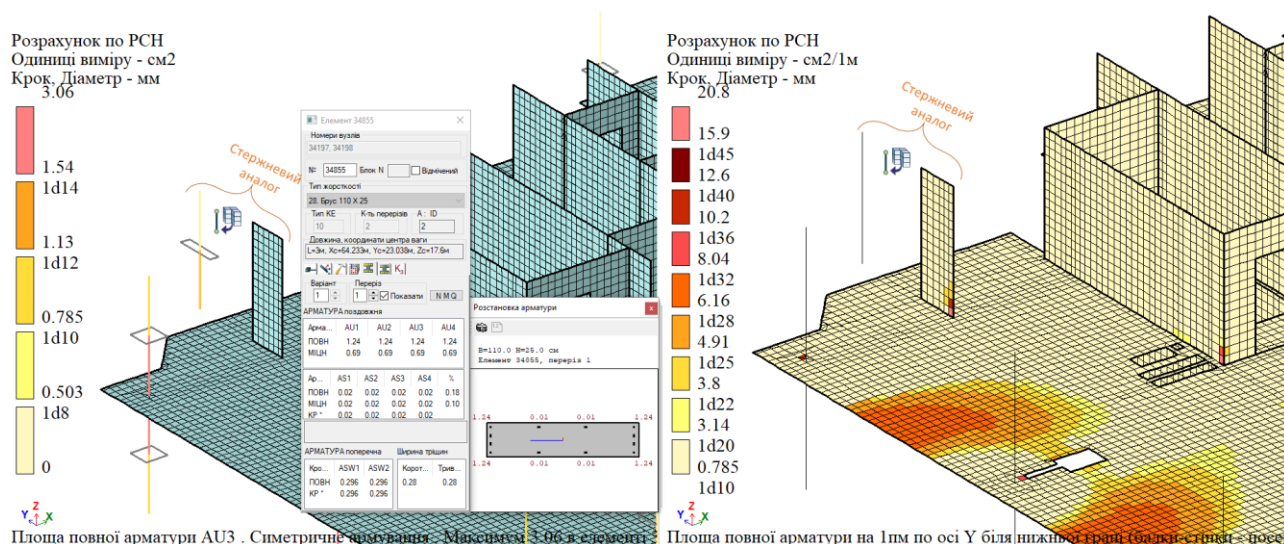


Рис. 5. Результати підбору армування в пілоні, змодельованому за допомогою пластинних СЕ і стрижневого аналога

З метою виконання чисельних досліджень інколи існує необхідність у побудові детальних скінченно-елементних моделей будівельних конструкцій і їхніх вузлів: наприклад, сталева балка в складі рами, змодельована пластинними скінченними елементами для дослідження ефектів локальної втрати стійкості (рис. 6), а також залізобетонна балка, тіло бетону якої

змодельовано об'ємними, а армування — стрижневими скінченними елементами, з метою дослідження нелінійних ефектів під навантаженням (рис. 7) [9]. У цих моделях стрижневі аналоги виконують роль допоміжного інструменту для аналізу, що дає змогу отримати з вихідних скінченних елементів зусилля в перерізах конструкцій як для класичних стрижневих елементів.

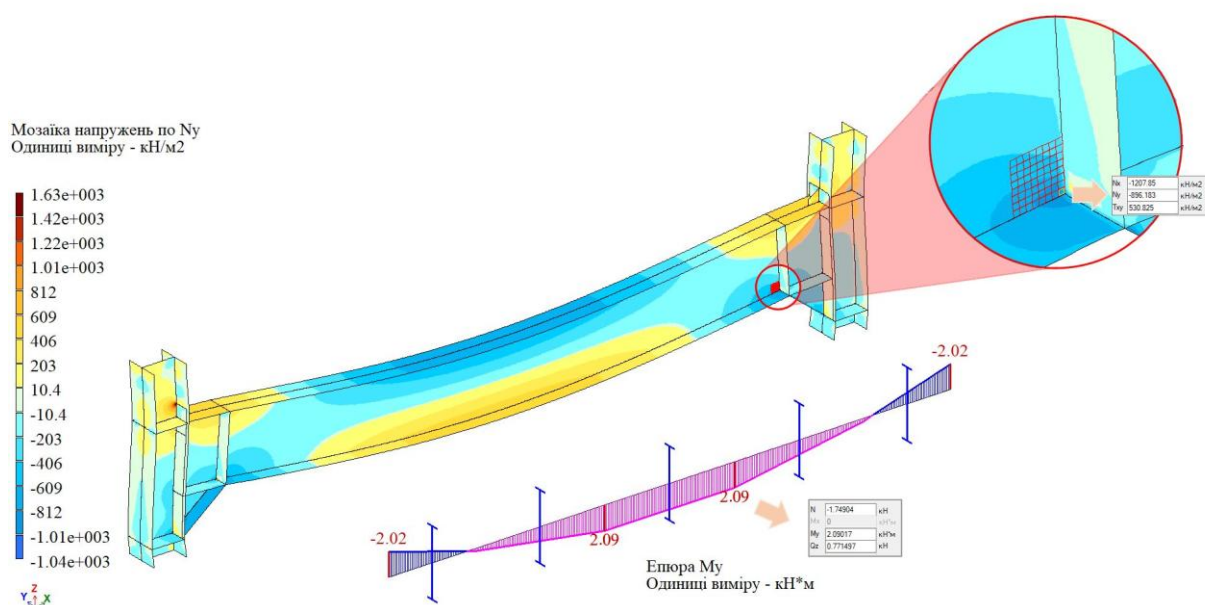


Рис. 6. Нормальні напруження та згинальні моменти в сталевій балці, змодельованій пластинними СЕ і стрижневими аналогами

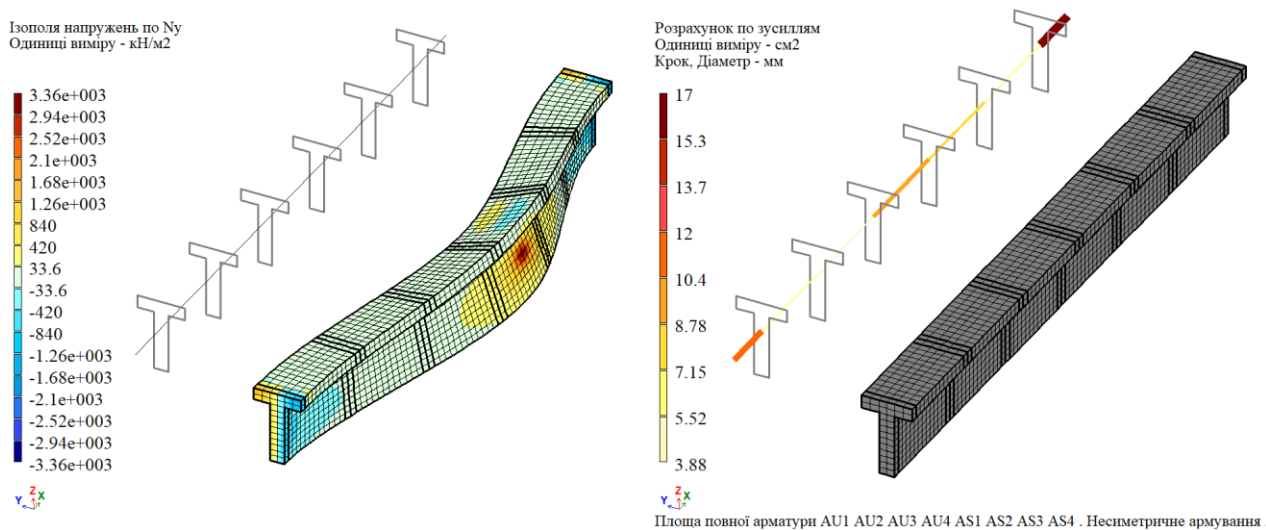


Рис. 7. Нормальні напруження та згинальні моменти в залізобетонній балці, змодельованій об'ємними СЕ і стрижневими аналогами

Існують масивні кам'яні, бетонні та залізобетонні конструкції, які зазвичай моделюють з об'ємних скінченних елементів, але для прикладних розрахунків і конструювання необхідно отримати зусилля

в певних перерізах у подібному до стрижнів вигляді. Так, у моделі вихідного порталю тунелю стрижневі аналоги були застосовані для одержання внутрішніх зусиль у перерізах склепіння та стінок (рис. 8).

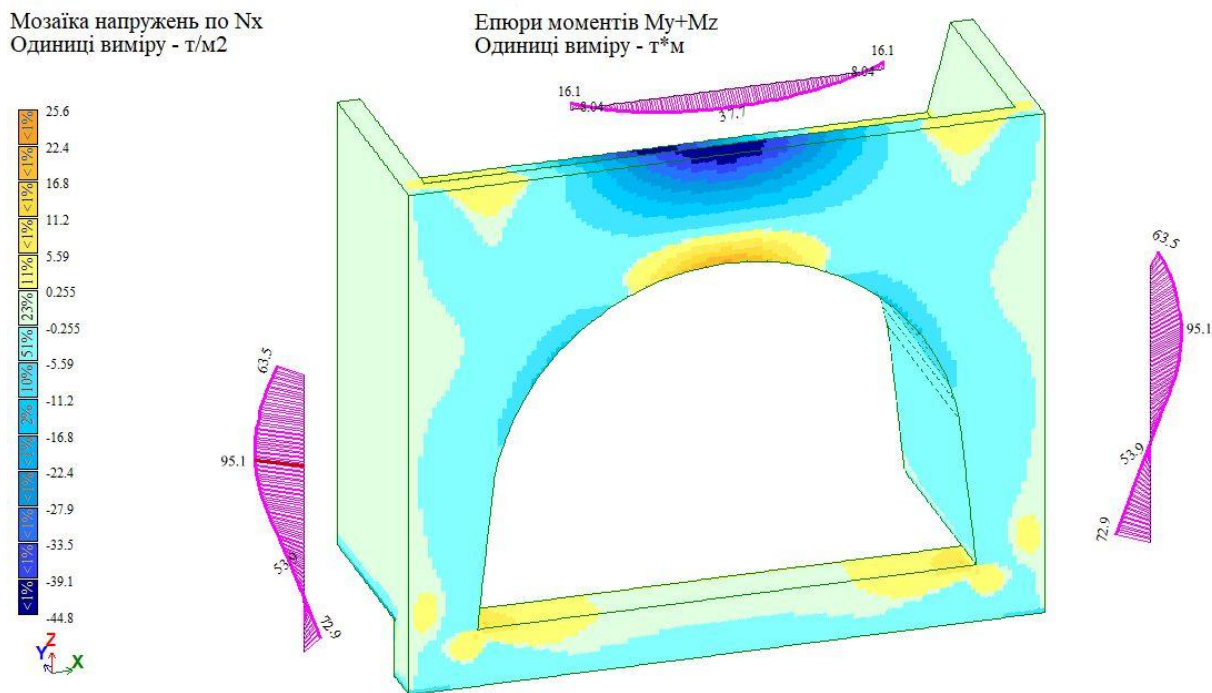


Рис. 8. Нормальні напруження та згинальні моменти в склепінні та стінках вихідного порталю тунелю, змодельованого об'ємними СЕ і стрижневими аналогами

Висновки. Наведена чисельно-аналітична методика обчислення внутрішніх зусиль у перерізах будівельних конструкцій має ряд переваг у разі застосування в розрахунках скінченно-елементних моделей.

По-перше, такий підхід передбачає максимальне збереження вигляду вихідної моделі з урахуванням міркувань інженера про доцільність вибору тих чи інших типів скінченних елементів, граничні розміри скінченно-елементної сітки та влаштування вузлів примикання конструкцій.

По-друге, для обчислення внутрішніх зусиль у складених перерізах конструкцій застосовують вузлові реакції скінченних елементів, що можна вважати аналогом інтегрування напружень за площею

поперечного перерізу [10]. Однак визначення напружень у довільних точках скінченних елементів, зокрема у вузлах, зазвичай може бути пов'язане з втратою точності. Запропонована методика дає змогу працювати зі скінченними елементами будь-якої розмірності та будь-якою математичною реалізацією, одержуючи достатньо точні результати, оскільки рівноваги у вузлах скінченно-елементної моделі завжди слід дотримуватися. З можливістю вибрати, які вузли та скінченні елементи слід залучати до обчислення внутрішніх зусиль у складених перерізах, а які ні, побічно вирішують проблему врахування концентрації напружень у місцях опор та інших точках сингулярності.

По-третє, застосування в скінченно-елементних моделях додаткових проміжних об'єктів, таких як поперечні перерізи простінків або стрижневі аналоги, часом може виявитися найбільш прийнятним підходом для автоматизованого конструювання елементів, робота яких близька до роботи стрижнів, оскільки нормативні вимоги орієнтують інженерів оцінювати несучу здатність і експлуатаційну придатність конструкцій

саме на основі інтегрованих внутрішніх зусиль у стрижневих поперечних перерізах.

Недоліком запропонованої методики можна назвати те, що для застосування вузлових реакцій з обчисленням внутрішніх зусиль необхідно, щоб скінченні елементи й вузли формували єдину площину складеного перерізу. Розв'язати цю задачу можуть інструменти автоматизації побудови скінченно-елементних моделей, які допоможуть згенерувати необхідні об'єкти та налаштувати сітку скінченних елементів.

Список використаних джерел

1. Барабаш М. С., Сорока М. М., Сур'янінов М. Г. Нелінійна будівельна механіка з ПК ЛІРА-САПР: монографія. Одеса : Екологія, 2018. 248 с.
2. Barabash M. S., Tomashevskyi A. V. Bar analogues for modelling of building structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020. Vol. 16. Iss. 3. P. 100 – 106.
3. Городецький О. С., Євзеров І. Д. Комп'ютерні моделі конструкцій. Київ : Факт, 2007. 394 с.
4. Городецький О. С., Барабаш М. С. Урахування нелінійної роботи залізобетонних конструкцій у практичних розрахунках. *Будівництво, матеріалознавство, машинобудування*: зб. наук. праць. Дніпро: ПДАБА, 2014. Вип. 77. С. 54 – 59.
5. Gorodetskyi O. S., Barabash M. S., Romashkina M. A., Tomashevskyi A. V. «Characteristic load» principle. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020. Vol. 16. Iss. 2. P. 50 – 63.
6. Барабаш М. С. Комп'ютерне моделювання процесів життєвого циклу об'єктів будівництва : монографія. Київ: Сталь, 2014. 301 с.
7. Барабаш М. С. Вплив процесу зведення на просторову роботу несучих систем будівель. *Будівництво, матеріалознавство, машинобудування*: зб. наук. праць. Дніпро: ПДАБА, 2012. № 65. С. 29 – 34.
8. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Довідник з опору матеріалів. Київ: Наукова думка, 1988. 736 с.
9. Barabash M. Some aspects of modelling nonlinear behaviour of reinforced concrete. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2018. Vol. 100. P. 164 – 171.
10. Gorodetskyi O. S., Barabash M. S., Filonenko Yu. B. Numerical Methods for Determining Stiffness Properties of a Bar Cross-Section. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. B. 55. Vol. 2. P. 180 – 188.

Томашевський Андрій Володимирович, інженер-програміст ТОВ «ЛІРА САПР», асистент кафедри комп'ютерних технологій будівництва, Національний авіаційний університет.
ORCID 0000-0001-5960-2100. Тел.: +38 (096) 225-38-42. E-mail: tomashevskyi.a.v@gmail.com.

Andrii V. Tomashevskyi, software engineer «LIRA SAPR» LLC, lecturer assistant in Department of Computer Technologies for Construction, National Aviation University. ORCID 0000-0001-5960-2100. Tel.: +38 (096) 225-38-42. E-mail: tomashevskyi.a.v@gmail.com.

Статтю прийнято 12.03.2025 р.