# *ЗАЛІЗНИЧНА КОЛІЯ ТА КОЛІЙНЕ ГОСПОДАРСТВО*

**УДК 528.1**

## МЕТОДИКА ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО РАСЧЕТА КРИВИЗНЫ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАССЫ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ

**Кандидати техн. наук В.Н. Астахов, А.С. Саяпин, П.И. Лоцман**

## МЕТОДИКА ГЕОДЕЗИЧНОГО РОЗРАХУНКУ КРИВИЗНИ СТРУКТУРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТРАСИ ЗАЛІЗНИЦІ

**Кандидаты техн. наук В.М. Астахов, О.С. Саяпін, П.І. Лоцман**

## METHODOLOGY FOR CALCULATING THE GEODESIC CURVATURE OF THE STRUCTURAL ELEMENTS OF THE LINE OF THE RAILWAY

**Cand. of tehn. sciences V.N. Astakhov, A.S. Sayapin, P.I. Lotsman**

*В работе показан расчет геодезических элементов площадных структур при трассировании. Установлены объективные факторы выделения границ таких структур. Детально раскрыт геометрический смысл кривизны территории. Математически обоснована классификация площадных объектов с учетом знаков горизонтальной и плановой кривизны.*

***Ключевые слова:*** *геодезические элементы, плановая, вертикальная, горизонтальная кривизна, радиус, дуга, проекция Гаусса, уравнения кривизны.*

*У роботі показано розрахунок геодезичних елементів майданних структур при трасуванні. Встановлені об'єктивні чинники виділення меж таких структур. Детально розкрито геометричний сенс кривизни території. Математично обґрунтована класифікація майданних об'єктів з урахуванням знаків горизонтальної та планової кривизни.*

***Ключові слова:*** *геодезичні елементи, планова, вертикальна, горизонтальна кривизна, радіус, дуга, проекція Гауса, рівняння кривизни.*

*The paper shows how to calculate the geodesic elements areal structures in tracing. Set of objective factors such as borders structures. Details disclosed geometric meaning of curvature territory. Mathematically justified the classification of polygon objects with signs of horizontal curvature and planning. The boundaries of the structural elements of the route are directly dependent on the value of the curvature described by the above differential equations. Thus, the selection of elements represent mathematical task and can be done by methods formalized track surface topographic analysis. background formalization available in classic definitions of curvature, and the feature points are not only the concept of characterizing the surface, important numerical characteristics of curvature. Objective result of the allocation of the boundaries of polygon objects can be obtained by taking into account the signs and magnitudes of the curvature of the track surface and the other morphometric variables.*

***Keywords:*** *geodetic elements, planning, vertical, horizontal curvature, the radius of the arc, the projection of the Gauss curvature equation.*

**Постановка проблемы.** Выделение структурных элементов территории проводимое при изысканиях трасс железных дорог начинается с камерального трассирования по топографической карте. При этом в выделенные элементы состоят из массива характерных точек, одномерных элементов или структурных линий [2]. Каждая точка имеет различные численные характеристики, участки с близкими значениями характеристик объединяются в площадные объекты. Наиболее объективные результаты при выделении таких объектов получаются с учетом знака и величины кривизны территории. Методика измерения кривизны современными геодезическими инструментами детально рассмотрена С.И. Матвеевым [3]. Геометрический смысл кривизны при этом раскрыт не был.

**Анализ публикаций посвященных решению проблемы.** Публикации посвященные проблеме расчета кривизны структурных элементов трассы основываются на данных о высоте, уклоне, ориентации структурных элементов. Расчёт с учетом фактора кривизны производился фрагментарно. Хотя известно, что крутизна и ориентация структурных элементов являются составляющими одного целого, а именно взятого со знаком минус двухмерного вектора градиента высоты [4].

**Целью исследования** является расчет морфометрических факторов кривизны элементов трассы.

**Основной материал.** Для выяснения геометрического смысла рассмотрим произвольную плоскую кривую. Рассмотрим задачу нахождения длины дуги $s$ кривой $y=f(x)$ от точки $x=a$ до точи $x=b$, показанной на рис. 1, слева. Длину малого отрезка линии $AC$ заменяем длиной отрезка прямой, соединяющей точки $A$ и $C$. Мы рассматриваем только кривые без разрывов и изломов. Различием длины дуги от длины отрезка прямой порядка ($\Delta x$) и при переходе к пределу (к дифференциалам) можно пренебречь. Таким образом получим:

$$\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=(\Delta x)\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\,. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\,. \qquad (2)$$

Переходим в последнем выражении к пределу, при $\Delta x \to 0$; при этом $\Delta y/\Delta x$ превращается в производную $y' = f'(x)=dy/dx$, где $f=f(x)$ —уравнение кривой линии. Таким образом получаем

$$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=\sqrt{dx^2+dy^2} \qquad (3)$$

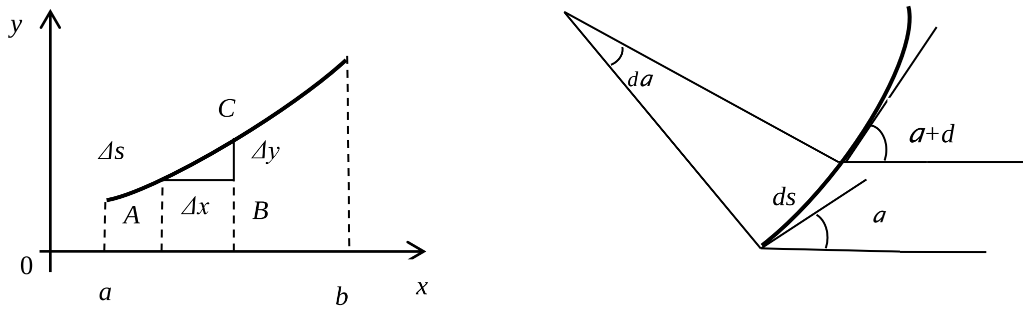


Рис. 1. Длина дуги и геометрической смысл дифференциала дуги и кривизны

Величина $ds$ есть дифференциал дуги. В трехмерном случае дифференциал дуги равен:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\,, \qquad (4)$$

С длиной дуги связано определение радиуса кривизны $R$ кривой в некоторой точке. Величину $1/R$ называют просто кривизной (чем меньше радиус, тем круче заворачивается линия).

Возьмем малый участок кривой (рис. 1, справа) длиной $ds$ и найдем угол между касательными к кривой в концах этого участка. Этот угол можно рассматривать как приращение $da$ угла $a$ наклона касательной к оси $x$. Проведем в двух соседних точках нормали (перпендикуляры к касательным). Угол между нормалями равен углу $da$ между касательными, согласно известной геометрической теореме. Отсюда можно найти расстояние $R$ точки пересечения нормалей от кривой.

Будем рассматривать малый участок кривой как дугу окружности. Нормаль к окружности, очевидно, представляет собой радиус.

Точка пересечения нормалей есть центр окружности. Если бы кривая была окружностью, то $ds=Rda$ поскольку $a$ - центральный угол равный длине дуги деленной на радиус на нее опирающийся, или

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{R}, \tag{5}$$

Эта величина постоянна для любого участка дуги окружности. Для бесконечно малого участка произвольной кривой эта величина является определением кривизны в данной точке. Пользуясь тем, что $a=arctgy'$, следовательно:

$$d\alpha = darctg\,\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{6}$$

и формулой для $ds$ можно найти выражение для кривизны

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{1}{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^{3/2}}\bullet\frac{\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}, \tag{7}$$

Знак кривизны $d\alpha/ds$ совпадает со знаком второй производной $y'$ и характеризует направление выпуклости кривой. Если в точке *Хо* величина $y''>0$ (рис. 2, а), то кривая вблизи этой точки проходит выше касательной в этой точке и направлена выпуклостью вниз. Если $y''(x0<0)$ (рис. 2,б), то кривая проходит ниже касательной и направлена выпуклостью вверх.

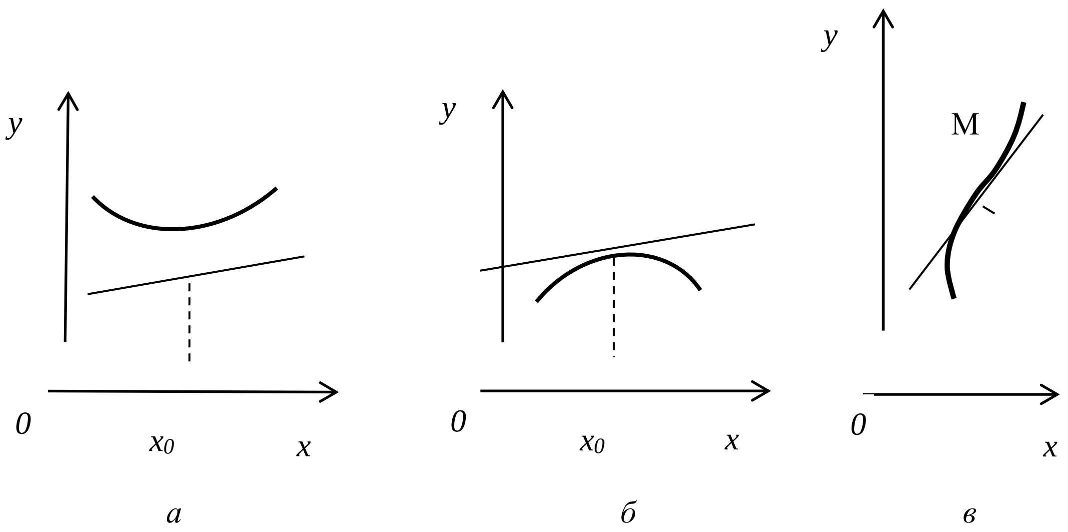


Рис. 2. Иллюстрация влияния знака кривизны на форму кривой

Может случиться, что $y''(x0)=0$, причем справа от $x0$ (т. е. при $x>x0$) $y''(x)>0$, а при $x<x0$ будет $y''(x)<0$. Это значит, что справа от точки $x0$ кривая направлена выпуклостью вверх, а слева – выпуклостью вниз (рис. 2, в). В такой точке (точка *М* на рис. 2, в) кривая переходит с одной стороны касательной на другую, в ней кривая меняет направление выпуклой «перегибается». Поэтому такие точки называют точками перегиба.

Доказано, что в трехмерном пространстве земной поверхности независимых кривых не две (горизонтальная и вертикальная), а три, и что для классификации форм земной поверхности требуется учесть знаки не менее чем пяти кривых.

К.Ф. Гаусс (1827) доказал, что введенная им так называемая полная (Гауссова) кривизна $K=kmaxkmin$ не меняется при любом изгибании поверхности, не меняющем длины кривых на ней (т.е. когда поверхность не сминается и не растягивается). Эта теорема широко применяется в геодезии и картографии, например при проектировании объектов на Земле на поверхности типа конуса, разворачивающиеся в плоский лист без изменения длин кривых (так называемая проекция Гаусса) [5].

Дополнительно гравитационное поле выделяет в той же точке два других нормальных сечения – имеющее общую касательную с горизонталью и перпендикулярное ему, вдоль которого течет вода. Кривизны этих двух нормальных сечений и есть горизонтальная и вертикальная кривизны, соответственно.

Эти направления, как доказано выше, взаимно перпендикулярны, с ними вместе взаимно перпендикулярны и эти выделенные нормальные сечения. Кривизна нормального сечения вдоль горизонтали называется горизонтальной кривизной, вдоль линии тока – вертикальной кривизной. В выборе знака кривизны имеется некоторый произвол; в науках о Земле принято считать кривизну положительной, если кривая нормального сечения обращена выпуклостью вверх и отрицательной - в противоположном случае.

Выведем вначале формулу для наделенной знаком кривизны горизонтали $k_p$, известной еще как плановая кривизна. Напомним, что абсолютное значение $k_p$ есть $|d^2r/dv^2|$, или в векторном виде $d^2\mathrm{r}/dv^2$. Компоненты вектора $d^2r/dv^2$ можно найти, дифференцируя формулу; в результате находим для неособых точек $d^2r/dv^2=-\ k_p\ dr/du$ где $dr/du$ есть единичный вектор касательной к линии тока,

$$K_P=-(q^2r-2pqs+p^2t)/(p^2+q^2)^{3/2}\,, \qquad (8)$$

где $r=d^2h/dx^2$, $s=d^2h/dxdy$, $t=d^2h/dy^2$.

Теперь формулу для горизонтальной кривизны $k_h$, можно найти по известной в дифференциальной геометрии поверхностей теореме Менье, согласно которой $k_h=k_pGF$; используя выведенное выше выражение для $GF$, находим для горизонтальной кривизны формулу

$$K= -(q^2r-2pqs+p^2t)\,/[(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)^{1/2}]\,, \qquad (9)$$

знаки $k_p$ и $k_h$, в неособых точках совпадают, но в отличие от $k_h$, плановая кривизна $k_p$ (т.е. наделенная знаком кривизна горизонтали) стремится к бесконечности близ вершин холмов и лощин. Действительно вблизи этих особых точек горизонталь близка к окружности радиуса $R$, а потому $\backslash k_p\backslash{\sim}1/R$, т.е. $\backslash k_p\backslash$ стремится к бесконечности при $R\to 0$. Это поведение $k_p$ делает на практике более предпочтительным использование горизонтальной кривизны $k_h$.

Из дифференциальной геометрии поверхностей известно, что средняя кривизна $H$ в данной точке равна половине суммы любых двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений, а потому $H={}^1/_2(k_v\ +\ k_h)$, где $k_v$ есть вертикальная кривизна. Известная формула для $H$ есть

$$H = -{}^1/_2\ [(1\ +q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\ /(1+p^2+q^2)^{3/2}, \qquad (10)$$

откуда с помощью (3.5) и $H={}^1/_2(k_v\ +\ k_h)$ находим формулу для вертикальной кривизны

$$k_v\ = -(p^2r+2pqs+q^2t)\ /[(p2+<q2)(\ 1+p^2+q^2)^{3/2}]\ , \qquad (11)$$

т.е. кривизны профиля склона (в литературе ее называют еще профильной кривизной).

**Выводы.** Границы структурных элементов трассы напрямую зависят от значения кривизны описываемой приведенными выше дифференциальными уравнениями. Таким образом, выделение элементов представляют собой математическую задачу, и может быть проведено формализованными методами анализа топографической поверхности трассы.

Предпосылки формализации имеются в классических определениях кривизны, причем характерные точки являются не единственным понятием характеризующим поверхность, важны численные характеристики кривизны.

Объективный результат при выделении границ площадных объектов может быть получен с учетом знаков и величин кривизны поверхности трассы и других морфометрических величин.

***Список использованных источников***

1. Матвеев, С.И. Геометрия группового уравнения [Текст] / С.И. Матвеев // Геодезия и картография. – 1997. – №10. – С. 13-16.
2. Саяпін, О.С. Геодезичний контроль геометрії залізничної колії [Текст] / О.С. Саяпін, Ю.В. Щербина, П.І. Лоцман // Інженерна геодезія: наук.-техн. збірник. – 2008. – Вип. 52. – С. 172-176.
3. Зельдович, Я.Б. Элементы прикладной математики [Текст] / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мишкис. – М.: Наука, 1972. – 78 с.
4. Цветков, В.Я. Геоинформационные системы и технологии [Текст] / В.Я. Цветков. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 288 с.
5. Геодезія [Текст] / за ред. С.Г. Могильного, С.П. Войтенко. – 2-ге вид. – Донецьк, 2003. – Ч. 1. – 458 с.

Рецензент д-р техн. наук, профессор А.Н. Даренский

Астахов Віктор Миколайович, канд. техн. наук, професор кафедри колії та колійного господарства, перший проректор Української державної академії залізничного транспорту. Тел.: (057) 730-10-01. E-mail: astahov@kart.edu.ua.
Саяпін Олександр Сергійович, канд. техн. наук, професор кафедри колії та колійного господарства, начальник центру оцінювання якості вищої освіти і дистанційного навчання Української державної академії залізничного транспорту. Тел.: (057) 730-10-04. E-mail: sayapin_09@mail.ru.
Лоцман Павло Ігорович, канд. техн. наук, доцент кафедри колії та колійного господарства Української державної академії залізничного транспорту.

Astakhov Viktor, candidate of technical sciences, professor of Department “Road and Track acilities”. Ukraine State Academay Transpor. E-mail:astahov@kart.edu.ua.
Sayapin Alexander, candidate of technical sciences, professor of Department “Road and Track acilities”. Ukraine State Academay Transpor. E-mail: sayapin_09@mail.ru.
Lotsman Pavel, kand. tekhn. sciences, associate professor of Department “Road and Track acilities”. Ukraine State Academay Transpor.