ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНІ СИСТЕМИ ТА УПРАВЛІННЯ НИМИ

УДК 621.391 **DOI: https://doi.org/10.18664/1994-7852.149.2014.82726**

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ПОБУДОВИ ТА КОДУВАННЯ КОДІВ З МАЛОЮ ЩІЛЬНІСТЮ ПЕРЕВІРОК НА ПАРНІСТЬ

К-т техн. наук О.С. Волков, магістр С.С. Жученко

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ И КОДИРОВАНИЯ КОДОВ С МАЛОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРОВЕРОК НА ЧЕТНОСТЬ

К-т техн. наук А.С. Волков, магистр С.С. Жученко

ANALYSIS OF METHODS OF CONSTRUCTION AND ENCODING LOW-DENSITY PARITY CHECK CODES

Candid. of technical sciences A.S. Volkov, student S.S. Zhuchenko

У статті проведено аналіз відомих методів побудови перевірочної матриці блокових та згорткових кодів з малою щільністю перевірок на парність. Проведений аналіз відомих методів кодування блокових та згорткових кодів з малою щільністю перевірок на парність показав переваги та недоліки відомих методів та позволив виявити та сформувати научно-технічну задачу.

***Ключові слова**: кодування, перевірочна матриця, згорткові коди, коди з малою щільністю перевірок на парність, блокові коди*

В статье проведен анализ известных методов построения проверочной матрицы блоковых и сверточных кодов с малой плотностью проверок на четность. Проведенный анализ известных методов кодирования блоковых и сверточных кодов с малой плотностью проверок на четность, показал достоинства и недостатки известных методов и позволил выявить и сформулировать научно-техническую задачу.

***Ключевые слова**: кодирование, проверочная матрица, сверточные коды, коды с малой плотностью проверок на четность, блоковые коды*

The article analyzes the famous methods of construction and representations of the check matrix block and convolutional codes with low-density parity-check. The analysis the famous methods of coding block and convolutional codes with low-density parity-check. Showed advantages and disadvantages of the known methods and allowed to identify and formulate a scientific and technical challenge. Shows the method of representation of the check matrix block codes with low-density parity-check using the Tanner graph, which like the check matrix is fully defines the parameters of the code. Check matrix of convolutional codes with low-density parity-check can also be described by Tanner graph, however, because the check matrix is infinite, then the Tanner graph is infinite. The analysis method of constructing the parity check matrix of block codes with low-density parity-check, which is based on a shortened Reed-Solomon code. Codes constructed in this method have a Tanner graph girth at least 6, which allows them to effectively use iterative decoding methods.

***Keywords:** encoding, the check matrix, convolutional codes, codes with low-density parity-check codes, block codes*

Вступ. У реальних каналах зв'язку для передачі даних використовують завадостійке кодування. В теорії завадостійкого кодування відомі два класи кодів: блокові та згорткові. Серед цих кодів відомі блокові коди з малою щільністю перевірок на парність (МЩПП), які були запропоновані Галлагером [1]. Але з появою вони не знайшли широкого використання. Далі Маккай [2] запропонував МЩПП коди з розрядженою перевірочною матрицею, що стало перспективним напрямком розвитку методів кодування та декодування МЩПП кодів.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими та практичними завданнями. В даний час відомо кілька методів побудови кодів з МЩПП, однак вони не являються алгебраїчними. Використовуючи алгебраїчні методи побудови можна побудувати коди з МЩПП із заздалегідь відомими параметрами. Це дозволить підвищити достовірність передачі даних у телекомунікаційних системах та мережах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В даний час на практиці використовуються блокові та згорткові коди з МЩПП. При побудові блокових кодів з МЩПП переважно використовувати алгебраїчні методи [3]. Наприклад, блокові коди з МЩПП побудовані алгебраїчним методом та використовуються у стандарті 10G Ethernet IEEE 802.3an [3, 4].

Окрім блокових кодів з МЩПП відомі згорткові коди з МЩПП, які були запропоновані Хіменесом та Зігангіровим [5]. Однак, ці коди недостатньо вивченні, порівняно з блоковими. З теорії завадостійкого кодування відомо, що за своїми характеристиками згорткові коди перевершують блокові [7]. Це справедливо і для кодів з МЩПП [1]. Згорткові коди з МЩПП використовуються в стандарті IEEE 802.16m.

Визначення мети та задачі дослідження. Метою даної статті є аналіз відомих методів побудови перевірочної матриці кодів з МЩПП.

Основна частина дослідження. Коди з МЩПП – це лінійні блокові коди, які визначаються за допомогою розрядженої перевірочної матриці *H*, яка містить велику кількість нулів та невелику кількість ненульових елементів [1, 4, 9, 10]. Регулярними називаються коди з МЩПП у яких вага стовпців перевірочної матриці γ, а вага рядків ρ визначається виразом $\rho=\gamma(n/m)$ та є постійним для усіх стовпців та рядків матриці [1, 9]. Якщо γ та ρ не постійні величини, то такі коди називаються нерегулярними. Перевірочну матрицю *H*, розмірності $m \times n$, можна називати розрядженою, якщо вага стовпців $\gamma << m$ [4]. Важливим параметром завадостійких кодів є швидкість кодування R, для регулярних кодів з МЩПП вона визначається виразом []:

$$R \geq 1-\frac{m}{n}=1-\frac{\gamma}{\rho}, \qquad (1)$$

якщо *H* має повний ранг, то в (1) можна використовувати знак рівності [4].

Щільність ненульових елементів має бути достатньо низькою, для того щоб можна було ефективно використовувати ітеративні методи декодування [1, 4]. Нижче представлена перевірочна матриця двійкового блокового коду з МЩПП. Вага кожного рядка $\rho=4$, а вага стовпців $\gamma=2$. Ця перевірочна матриця утворює регулярний блоковий код з МЩПП з наступними параметрами: $n=10$, $k=5$, $R \geq 1-\frac{4}{10}=\frac{3}{5}$, оскільки матриця має не повний ранг.

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Розглянемо дводольний граф Таннера, який забезпечує графічне представлення кодів з МЩПП [4, 9]. Крім цього його використовують для опису алгоритмів декодування. Граф Таннера містить 2 типу вузлів та ребра, які з'єднують їх. К першому типу вузлів відносяться n перевірочних вузлів, які відповідають стовпцям перевірочної матриці [4, 10]. Другий тип вузлів – кодові вузли, які відповідають *m* рядкам перевірочної матриці [4]. Перевірочний вузол j з'єднується ребром з кодовим вузлом i у тому випадку, якщо елемент матриці $h_{ij} \neq 0$. Граф Таннера для (2) представлено нижче.

Одним із параметрів перевірочної матриці кодів з МЩПП є мінімальна довжина циклу [4, 9]. На графе Таннера довжина циклу визначається кількістю ребер, що утворюють замкнутий шлях. Мінімальна довжина циклу у графі Таннера називається обхватом графа. На рисунку 1 виділені ребра складають цикл довжини 6.

Мінімальна довжина циклу для дводольного графа складає 4 [4, 10]. Чим менше обхват графа Таннера, тим будуть менш ефективні ітеративні алгоритми декодування [1, 4]. При побудові перевірочних матриць кодів з МЩПП намагаються уникати появі циклів довжини 4, такий цикл виникає якщо чотири ненульових елемента матриці можна представити як вершини прямокутника [9, 10]. При побудові *H*, щоб обхват графа був більш ніж 4, дотримуються наступної структурної властивості: не повинно бути двох рядків (або стовпців), які мають більш ніж одну спільну позицію, яка містить ненульовий елемент [4].

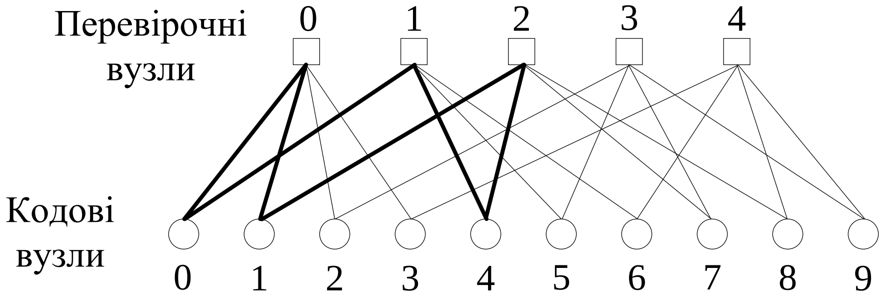

Рис. 1. Граф Таннера перевірочної матриці (2)

Розглянемо методи формування перевірочної матриці блокових кодів з МЩПП. Перший метод побудови було запропоновано Галлагером, суть якого полягає у формуванні H_G із γ підматриць, при цьому у кожного стовпці кожної підматриці знаходиться тільки одна «1». Матрицю H_G представимо як:

$$H_G = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_\gamma \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Кожна підматриця із (5) має розмірність $a \times a \cdot \rho$, де *a* та ρ – позитивні цілі числа більше 1 [1, 4]. В підматриці H_1 одиниці розташовані за наступним правилом: в *i*-ому рядку H_1 одиниці містяться у стовпцях з $[(i-1)\rho+1]$-го по $i\rho$-й, тобто у ступінчатому порядку [1]. Інші $\gamma-1$ підматриць формуються шляхом перестановки першої підматриці [1, 4]. Таким чином перевірочна матриця H_G, розмірності $a \cdot \gamma \times a \cdot \rho$ буде визначать регулярний код з МЩПП з параметрами $N = a \cdot \rho,\ K = a \cdot \rho - a \cdot \gamma,\ R = 1 - \gamma / \rho$, якщо матриця має повний ранг [1].

Галлагер довів, що регулярні коди з МЩПП, які визначаються перевірочною матрицею H_G з $\gamma \geq 3$ мають велику мінімальну відстань. Представлений Галлагером [1] метод побудови не гарантує відсутність у графі Таннера циклів мінімальної довжини, але з використанням комп'ютерного обчислення можна побудувати H_G, методом описаним вище, без циклів довжини 4 [4].

Галлагером [1] та Маккаєм [2] було запропоновано двійкові коди з розрядженою перевірочною матрицею, при цьому він вперше представив результати комп'ютерного моделювання цих кодів для двійкового симетричного каналу і для двійкового каналу з адитивним білим Гауссовським шумом [2]. Результати показали, що коди, які запропонував Маккай можуть забезпечувати передачу даних зі швидкістю близькою до пропускної спроможності каналу [2, 4, 9].

Маккай [2] запропонував декілька способів формування розрядженої перевірочної матриці H_M, однак всі ці способи основані на довільному заповненні рядків та стовпців матриці, але з використанням деяких обмежень: H_M формується довільним заповненням стовпців з вагою γ, при цьому вага рядків довільна [2, 4]. Ще один метод це формування матриці довільним заповненням стовпців з вагою γ та рядків з вагою ρ, при цьому треба дотримуватися наступної структурної властивості: не має бути більше двох рядків (або стовпців), які мають більше ніж одну загальну позицію, яка містить ненульовий елемент [4, 6]. Також є метод, коли H_M формується як описано вище, але $H_M = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$ та H_2 має бути підматрицею, яка інвертується [2, 6].

Перші недвійкові блокові коди з МЩПП були запропоновані Маккаєм та Дейвом [6]. Вони запропонували метод побудови перевірочної матриці недвійкових кодів з МЩПП та метод їх декодування. Було запропоновано метод формування перевірочної матриці на основі довільного заповнення стовпців з вагою $\gamma > 2$, при цьому вага рядків довільна. Вага рядка або стовпця це кількість його ненульових елементів. Ненульові елементи перевірочної матриці недвійкових кодів з МЩПП це елементи поля *GF(q)*, де $q=2^m$, де m – позитивне ціле число. Для кодування недвійкових кодів з МЩПП необхідно сформувати матрицю, що породжує, за допомогою операції Гаусса-Жордана над перевірочною матрицею [6].

Одним із недоліків кодів Маккая є те, що вони не структуровані, тому немає можливості використовувати методи кодування з низькою складністю. Кодування виконується з використанням матриці, що породжує.

Розглянемо інші методи формування перевірочної матриці та способи кодування цих кодів. Вагомий внесок у розвиток блокових кодів з МЩПП внесла група вчених на чолі з Шу Ліном [9], які розробили різні методи побудови таких кодів, а також методи їх декодування: 1) коди з МЩПП, основані на теорії кінцевої геометрії (Евклідова геометрія) 2) коди з МЩПП, основані на теорії полів Галуа 3) недвійкові коди з МЩПП [3, 4, 9], на відміну від кодів запропонованих Маккаєм, перевірочна матриця цих кодів структурована.

Одним із важливих класів двійкових кодів з МЩПП є коди побудовані на основі скорочених кодів Ріда-Соломона [3]. Метод побудови цих кодів заснований на простій структурі скорочених кодів Ріда-Соломона з двома інформаційними символами. Обхват графа Таннера перевірочної матриці таких кодів з МЩПП буде як мінімум 6 [3, 9]. Розглянемо метод побудови перевірочної матриці цих кодів.

Нехай задано поле Галуа *GF(q)*, де $q=p^m$, де p – просте число, а m – позитивне ціле число. Зафіксуємо многочлен $G(x)$, що породжує циклічний $(N, K, d_{\min})$ – код Ріда-Соломона с двома інформаційними символами, де $N = q-1$, $K = 2$, а $d_{\min} = N - K + 1$,

$$\begin{aligned} G(x) &= (X-\alpha)(X-\alpha^2)\cdots(X-\alpha^{2t}) = \\ &= g_0 + g_1 X + g_2 X^2 + \cdots + g_{2t-1} X^{2t-1} + X^{2t} \end{aligned}, \quad (6)$$

де t – кратність виправлених помилок кодом Ріда-Соломона.

Будь-який код Ріда-Соломона містить q^2 кодових слів [3, 4]. Для побудови перевірочної матриці кодів з МЩПП розділимо всі можливі кодові слова $(N, 2, d_{\min})$ – кодів Ріда-Соломона на q підмножин, кожне з яких складається з q кодових слів [3].

Кожний символ кодового слова з кожного із підмножин представим у вигляді розрядженої послідовності довжини q та запишемо їх у матрицю H_i, відобразив таким чином усі із підмножин кодових слів їх можна об’єднати у матрицю H наступним чином [3]:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_q \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Утворена таким чином перевірочна матриця представлена у оригінальній формі Галлагера, оскільки у кожному стовпці кожної підматриці знаходиться 1 ненульовий елемент [3]. Також у графі Таннера перевірочної матриці будуть відсутні цикли довжини 6. Даний алгебраїчний метод побудови перевірочної матриці блокових кодів з МЩПП дозволяє отримати код з наперед відомими параметрами [3, 4].

Основним недоліком усіх блокових кодів, у тому числі і з МЩПП, є те, що процес кодування та декодування даних не може здійснюватися неперервно у часі [4, 9, 10]. Цей недолік відсутній у згорткових кодів, крім того вони дозволяють досягти більш високої достовірності передачі інформації ніж блокові.

Представлення згорткових кодів з МЩПП не відрізняється від представлення блокових, але має свої особливості.

Згорткові коди з МЩПП, також як блокові визначаються розрядженою перевірочною матрицею, однак зручніше їх визначати через транспоновану перевірочну матрицю (3), яка також називається формувач синдрому [5].

$$H^T = \begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & & \\ H_0^T(0) & \cdots & H_{m_s}^T(m_s) & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & H_0^T(t) & \cdots & H_{m_s}^T(t+m_s) \\ & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де $H_i^T(t+i)$ – підматриця, розмірності $n \times (n-k)$, де n – довжина кадру кодової послідовності, а k – довжина інформаційного кадру, $i = 1 \ldots m_s$, де m_s – пам'ять формувача синдрому.

Регулярними називаються згорткові (m_s, ρ, γ) – коди, у яких формувач синдрому містить у кожному рядку ρ ненульових елементів, а у кожному стовпці – γ [5, 8].

Згорткові коди з МЩПП, також як і звичайні згорткові коди зручніше представлять через оператор затримки X [8]. Наприклад, код заданий перевірочною матрицею (4) буде мати наступні параметри: $m_s = 2,\ n = 3,\ k = 1,\ R = 1/3$.

$$H^T(X) = \begin{pmatrix} 1 & X^2 \\ 1+X & X \\ X^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Перевірочна матриця згорткових кодів з МЩПП можна представити в вигляді графа Таннера, однак оскільки вона напівнескінченна, то і граф Таннера буде напівнескінченний [5, 8]. Перевірочна вершина графа Таннера буде відповідати парним та непарним стовпцям формувача синдрому, а рядки – кодовим вузлам [4, 8]. Граф Таннера для формувача синдрому (4) представлено на рисунку 2

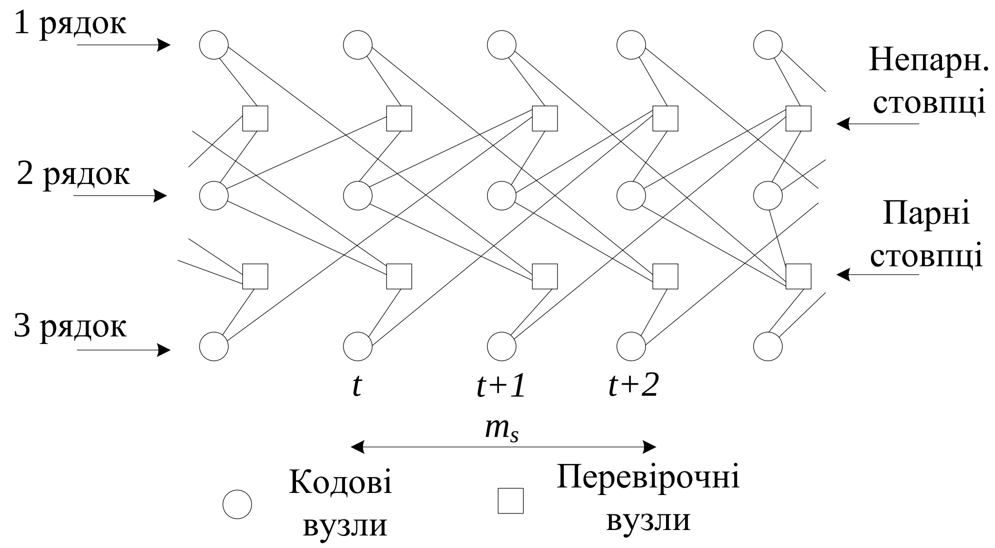

Рис. 2. Граф Таннера перевірочної матриці (4)

В даний час існує декілька методів побудови перевірочної матриці згорткових кодів з МЩПП, два основних це метод «розгортання», запропонований Хіменесом та Зігангіровим [5], та заповнення рядків та стовпців матриці довільнім чином [8]. Суть метода «розгортання» полягає у перетворені перевірочної матриці блокового коду у напівнескінченну перевірочну матрицю згорткового коду [4, 5, 8].

Перевагою метода «розгортання» є те, що це алгебраїчний спосіб побудови перевірочної матриці, що дозволяє побудувати код з наперед заданими параметрами. Однак, для побудови кодів з «гарною» здатністю виправляти помилки, треба знайти «гарну» перевірочну матрицю блокового коду та правильно виконати її перетворення у напівнескінченну перевірочну матрицю згорткового коду.

Побудова перевірочної матриці згорткових кодів з МЩПП за допомогою довільного заповнення рядків та стовпців не дозволяє побудувати коди з наперед заданими параметрами. Однак, шляхом перебору можна отримати коди з необхідними параметрами.

Висновки з дослідження і перспективи, подальший розвиток у даному напрямку. Виконано аналіз відомих методів представлення згорткових та блокових кодів з МЩПП. Показано, що перевірочна матриця повністю визначає код, а граф Таннера позволяє оцінити мінімальну довжину циклу у матриці.

Зроблено аналіз відомих методів побудови перевірочних матриць згорткових та блокових кодів з МЩПП. Аналіз показав, що з використанням алгебраїчних методів побудови можна побудувати коди з наперед заданими параметрами.

Головною перевагою згорткових кодів з МЩПП є те, що передача інформації може здійснюватися практично зі швидкістю рівною пропускної здатності каналу [5, 8]. Однак, існує всього декілька алгебраїчних методів формування перевірочної матриці таких кодів, на відміну від блокових, тому що дослідження згорткових кодів з МЩПП є складною науковою задачею.

Список використаних джерел

1. Gallager R.G. Low-density parity-check codes / R.G. Gallager. – Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1963. – P. 92.
2. MacKay D.J.C. Near Shannon limit performance of low density parity check codes / D.J.C. MacKay, R.M. Neal // Electronics Letters. – 1996. – Vol. 32, №18. – August – P. 1645-1646.
3. Djurdjevic I. A Class of Low-Density Parity-Check Codes Constructed Based on Reed-Solomon Codes With Two Information Symbols / I. Djurdjevic, Jun Xu, K.Abdel-Ghaffar, S. Lin // IEEE Communications Letters. – 2003. – Vol.7, №7. – July. – P. 317-319.
4. William E. Ryan. Channel Codes / E. Ryan William, S. Lin – Cambridge, 2009. – P. 710.
5. Felstrom A. J. Time-Varying Periodic Convolutional Codes With Low-Density Parity-Check Matrix / A. J. Felstorm, K. Sh. Zigangirov // IEEE Transactions of information theory. – 1999. – Vol. 45, №6. – September. – P. 2181-2191.
6. Davey M.C. Low density parity check codes over GF(q) / M.C. Davey, D.J.C. MacKay // IEEE Communications Letters. – 1998. – Vol.2, №6. – June. – P. 165-167.
7. Приходько С.И. Метод построения алгебраических каскадных сверточных кодов / С.И. Приходько, А.С. Волков // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, – 2010. Вип. 6(87). – С. 224 – 228.
8. Marcos B.S. Tavares On Low-Density Parity-Check Convolutional Codes: Constructions, Analysis and VLSI Implementation / Tavares Marcos B.S. – Jörg Vogt Verlag, 2010. – P. 206.
9. Shu Lin. Error Control Coding (2nd Edition) / S. Lin, D.J. Costello. – Pearson-Prentice Hall, 2004. – P. 1260.
10. Moreira J.C. Essentials of Error-Control Coding / J.C. Moreira, P.G. Farrell. – John Wiley & Sons, 2006. – P. 388.

Рецензент д-р техн. наук, професор С.І.Приходько

Волков Олексій Станіславович, кандидат технічних наук, доцент кафедри транспортний зв’язок Українська державна академія залізничного транспорту. Тел.: (057) 730-10-81. E-mail: leshvol@mail.ru

Жученко Станіслав Сергійович, магістр кафедра транспортний зв’язок Українська державна академія залізничного транспорту. Тел.: (057) 730-10-81. E-mail: Zhuchenko_Stas@ukr.net.

Alexey Volkov Stanyslavovych candidate tehnycheskyh sciences, associate professor of the department transportnaya communications Ukrainian state academy of railway transport. Tel.: (057) 730-10-81. E-mail: leshvol@mail.ru

Zhuchenko Stanislav Sergeevich, masters transportnaya communications department Ukrainian state academy of railway transport. Tel.: (057) 730-10-81. E-mail: Zhuchenko_Stas@ukr.net.