УДК 622.831 DOI: https://doi.org/10.18664/1994-7852.167.2017.97120

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИВЕДЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Доктора техн. наук Ю. С. Крутий, Н. Г. Сурьянинов (Одесская государственная академия строительства и архитектуры)

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ПРИВЕДЕНОГО РІВНЯННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ

Доктори техн. наук Ю. С. Крутій, М. Г. Сур'янінов (Одеська державна академія будівництва та архітектури)

FUNDAMENTAL SOLUTIONS ABOVE EQUATIONS OF THE PARAMETRIC OSCILLATIONS

Dr. sc. sciences Yu. S. Krutiy, N. G. Suryaninov

Определены фундаментальные решения уравнения Матье при нулевом параметре a *и произвольном параметре* q *с использованием метода прямого интегрирования. Наряду с исходным уравнением Матье рассматривается равносильная ему система уравнений. Фундаментальные решения ищутся в виде степенного ряда. Построена фундаментальная матрица решений равносильной системы уравнений. Показано, что эта матрица определяется однозначно и является матрицантом. Общее решение равносильной системы дифференциальных уравнений выражается с помощью матрицанта известной формулой, откуда получается общее решение исходного уравнения Матье.*

Ключевые слова: *параметрические колебания, уравнение Матье, метод прямого интегрирования, матрицант, фундаментальные решения.*

Визначено фундаментальні розв'язки рівняння Матьє при нульовому параметрі a *й довільному параметрі* q *з використанням методу прямого інтегрування. Поряд з вихідним* *рівнянням Матьє розглядається рівносильна йому система рівнянь. Фундаментальні розв'язки шукаються у вигляді степеневого ряду. Побудована фундаментальна матриця розв'язків рівносильної системи рівнянь. Показано, що ця матриця визначається однозначно і є матрицантом. Загальний розв'язок рівносильної системи диференціальних рівнянь виражається за допомогою матрицанта відомою формулою, звідки виходить загальний розв'язок вихідного рівняння Матьє.*

Ключові слова: *параметричні коливання, рівняння Матьє, метод прямого інтегрування, матрицант, фундаментальні розв'язки.*

We define the fundamental solution of the Mathieu equation for zero setting a and arbitrary parameters q using the method of direct integration. Along with the original Mathieu equation is considered tantamount to his system of equations. Fundamental solutions obtained in the form of a power series. It is built the fundamental matrix of solutions of the equivalent system equations.

It is shown that this matrix is unambiguously determined and is matriciant. The general solution of equivalent systems of differential equations is expressed by the well-known formula matriciant, where we obtain the general solution of the original Mathieu equation.

Keywords: *parametric oscillation, Mathieu equation, the method of direct integration matriciant fundamental solutions.*

Введение. Параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса, вызываемого прямым силовым воздействием на ту или иную колебательную систему. Он наступает при выполнении определенных соотношений между частотой изменения параметра и собственной частотой возбуждаемой системы. Эти условия отличаются от характерного для обычного резонанса простого условия совпадения частоты внешнего воздействия и собственной частоты системы.

Параметрические колебания описываются уравнением Матье, которое в канонической форме принято записывать в виде [1]

$$y''(x) + (a - 2q\cos 2x)y(x) = 0, \quad (1)$$

где $a, q-$ некоторые постоянные параметры.

Данное уравнение имеет множество приложений, причем, в зависимости от природы исходной задачи, параметры a, q определяются по-разному.

Анализ последних исследований и публикаций. В большинстве физических задач, которые приводят к уравнению (1), параметр q задается, в то время как параметр a является одним из собственных значений, при которых гарантировано наличие периодических решений уравнения [2, 3].

Когда параметры a и q заданы наперед, уравнение (1) называют общим уравнением Матье [2, 3]. Такое уравнение, согласно теореме Флоке, имеет частное решение $y(x) = e^{\mu x}\varphi(x)$, где $\varphi(x)-$ периодическая функция, а $\mu-$ характеристический показатель, зависящий от a и q. При этом основная трудность задачи заключается в определении параметра μ [4, 5].

Согласно методу Пуанкаре [4, 5], отыскание μ сводится к решению уравнения вида $\operatorname{ch}\pi\mu = y_1(\pi)$. При этом метод основывается на фундаментальных решениях $y_1(x), y_2(x)$ уравнения (1), удовлетворяющих условиям: $y_1(0) = 1;\ y_2(0) = 0;\ y_1'(0) = 0;\ y_2'(0) = 1$. Поэтому определение фундаментальных решений уравнения Матье при произвольных параметрах a, q является актуальной задачей [6 – 8].

Цель и задачи исследования. Во многих приложениях возможен такой характер параметрических колебаний, при котором параметр a при определенных условиях будет нулевым. Например, при колебаниях тонкой прямоугольной пластинки, помещенной в воздушном потоке со скоростью течения $v = v_0 + v_1 \sin \omega t$ (рис. 1), $a = 0$ при $c = \dfrac{3\pi}{4} b \rho v_0^2$, где b — ширина пластинки, ρ — плотность воздуха.

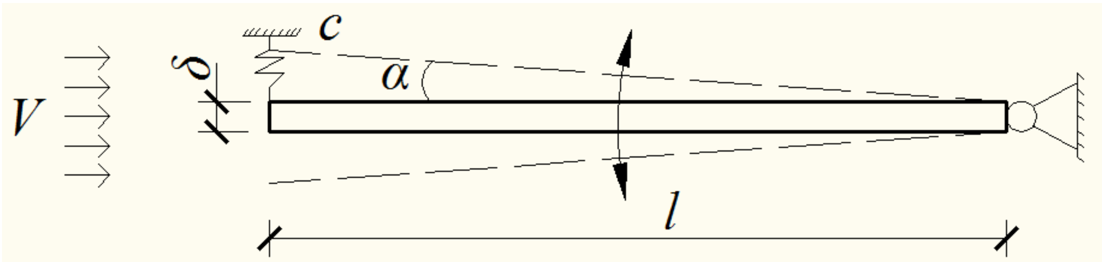

Рис. 1. Прямоугольная пластинка в воздушном потоке

Равенство $a = 0$ возможно также при колебаниях стержня под действием осевой периодической силы (рис. 2) или при колебаниях массы m в магнитном поле с переменным магнитным потоком (рис. 3), и в целом ряде других технических приложений.

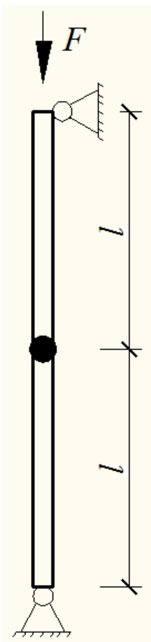

Рис. 2. Колебания стержня под действием периодической силы

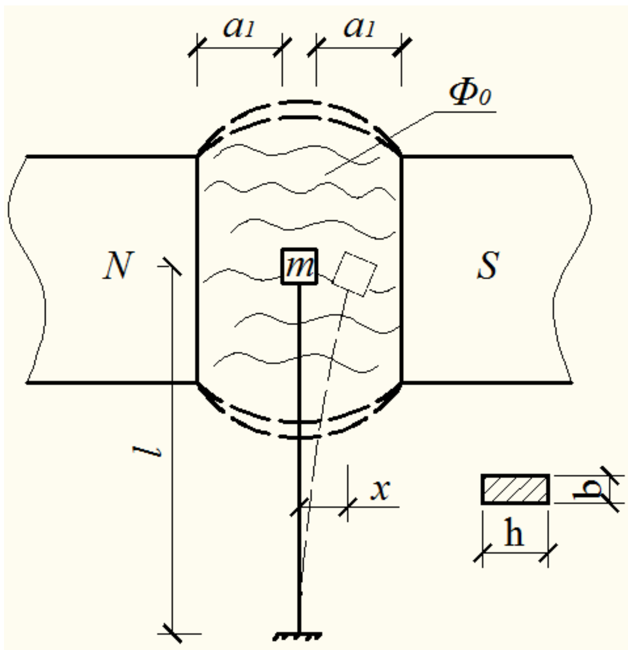

Рис. 3. Колебания массы в магнитном поле с переменным магнитным потоком

Аналитическое решение уравнения (1) для рассматриваемого случая предлагается построить методом прямого интегрирования. Суть метода подробно изложена в [9, 10]. Он основан на построении точных решений соответствующих дифференциальных уравнений с последующей разработкой способа численной реализации найденных общих интегралов.

Предлагаемым методом успешно решен целый ряд задач устойчивости и колебаний стержневых систем, пластин и оболочек [11 – 14].

Целью работы является определение фундаментальных решений уравнения Матье при нулевом параметре a и произвольном параметре q.

Основные результаты. При равенстве параметра a нулю уравнение (1) приобретает вид

$$y''(x) - 2q\cos 2x\, y(x) = 0 . \qquad (2)$$

Построим точное решение уравнения (2). Вместе с данным уравнением будем рассматривать равносильную ему систему уравнений

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = P(x)\Phi(x), \qquad (3)$$

где $\Phi(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных, а $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2q\cos 2x & 0 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы.

Фундаментальные решения $y_n(x)\ (n=1,2)$ уравнения (2) будем искать в виде ряда по степеням параметра $p = 2q$:

$$y_n(x) = b_{n,0}(x) + pb_{n,1}(x) + p^2 b_{n,2}(x) + p^3 b_{n,3}(x) + \ldots , \qquad (4)$$

где $b_{n,0}(x),\ b_{n,k}(x)\ (n=1,2)\ (k=1,2,3,\ldots)$ – неизвестные функции, которые будем считать непрерывными вместе со своими первыми и вторыми производными. Кроме того, образуем еще ряды из производных:

$$y_n'(x) = b_{n,0}'(x) + pb_{n,1}'(x) + p^2 b_{n,2}'(x) + p^3 b_{n,3}'(x) + \ldots ; \qquad (5)$$

$$y_n''(x) = b_{n,0}''(x) + pb_{n,1}''(x) + p^2 b_{n,2}''(x) + p^3 b_{n,3}''(x) + \ldots . \qquad (6)$$

Пока предполагаем, что все эти ряды равномерно сходятся. В таком случае будет возможна операция их почленного дифференцирования, вследствие чего обозначения $y_n'(x),\ y_n''(x)$ для сумм рядов (5), (6) будут законными.

Функции

$$b_{n,0}(x),\ b_{n,k}(x)\ (n=1,2)\ (k=1,2,3,\ldots)$$

найдем из условия

$$y_n''(x) - p\cos 2x\ y_n(x) = 0 \quad (n=1,2) . \qquad (7)$$

Воспользовавшись здесь представлениями (4), (6), приходим к необходимости выполнения равенства

$$b''_{n,0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty} p^k (b''_{n,k}(x)-\cos 2x\, b_{n,k-1}(x))=0 .$$

Для его удовлетворения следует приравнять к нулю все коэффициенты при степенях параметра q, начиная с нулевой степени:

$$b''_{n,0}(x)=0 ; \tag{8}$$

$$b''_{n,k}(x)=\cos 2x\, b_{n,k-1}(x) \ \ (k=1,2,3,...) . \tag{9}$$

Присоединим к последнему уравнению граничные условия

$$b_{n,k}(0)=b'_{n,k}(0)=0 \ \ (n=1,2)\ (k=1,2,3,...) . \tag{10}$$

Тогда, выписывая фундаментальную систему решений уравнения (8) и дважды интегрируя (9), получим

$$b_{n,0}(x)=x^{n-1},\ \ b_{n,k}(x)=\int_0^x\int_0^x \cos 2x\ a_{n,k-1}(x)\,dxdx \ \ (n=1,2)\ (k=1,2,3,...) . \tag{11}$$

Последняя формула является рекуррентной. Она позволяет по известной начальной функции $b_{n,0}(x)$ последовательно определить функции $b_{n,k}(x)\ (k=1,2,3,...)$, которые назовем образующими. Очевидно, для таких функций равенства (7) будут удовлетворяться тождественно.

Помимо рекуррентной формулы (11), образующие функции также можно представить в развернутом виде:

$$b_{n,k}(x)=\int_0^x\int_0^x \cos 2x ... \int_0^x\int_0^x \cos 2x \int_0^x\int_0^x \cos 2x\, b_{n,0}(x)\ dxdxdxdx...dxdx . \tag{12}$$

Правая часть последней формулы содержит всего $2k$ интегралов.

Таким образом, формулами (4), (11), (12) определены два решения $y_n(x)\ (n=1,2)$ уравнения (2). При этом непосредственной проверкой легко убедиться в том, что матрица

$$\Lambda(x)=\begin{pmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ U'_1(x) & U'_2(x) \end{pmatrix} \tag{13}$$

удовлетворяет системе (3). Для этой матрицы с учетом (10) также находим

$$\Lambda(0)=\begin{pmatrix} U_1(0) & U_2(0) \\ U'_1(0) & U'_2(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{1,0}(0) & b_{2,0}(0) \\ b'_{1,0}(0) & b'_{2,0}(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{14}$$

Поскольку $\left|\Lambda(0)\right| = 1 \neq 0$, то матрица (13) является фундаментальной матрицей системы (3), а функции $U_n(x)\ (n = 1,2)$ – фундаментальные решения уравнения (2). Фундаментальная матрица, обладающая свойством (14), определяется однозначно и называется матрицантом [15]. С помощью матрицанта общее решение системы дифференциальных уравнений выражается известной формулой $\Phi(x) = \Lambda(x)\Phi(0)$. Отсюда получаем общее решение уравнения (2) в виде

$$y(x) = y(0)\,y_1(x) + y'(0)\,y_2(x). \quad (15)$$

Здесь константы интегрирования выражены через начальные параметры $y(0),\ y'(0)$.

Воспользовавшись формулой Якоби [16]

$$\left|\Lambda(x)\right| = \left|\Lambda(0)\right| \exp\left(\int_0^x Sp\,P(x)dx\right),$$

где $Sp\,P(x) -$ след матрицы $P(x)$, который в нашем случае равен нулю, для фундаментальных функций получаем тождество

$$y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x) = 1. \quad (16)$$

Далее, полагая

$$\cos 2x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}(2x)^{2j}, \quad (17)$$

запишем формулы для фундаментальных решений в удобном для численной реализации виде. Очевидно, после замены $\cos 2x$ в формуле (12) степенным рядом (17), образующие функции также будут представлять собою степенные ряды, причем наименьшая степень в них будет равна $n + 2k - 1$. Следовательно,

$$b_{n,k}(x) = x^{n+2k-1} \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,k,j}\, x^{2j}, \quad (18)$$

где $d_{n,k,j} -$ коэффициенты, подлежащие определению. При этом

$$b_{n,k-1}(x) = x^{n+2k-3} \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,k-1,j}\, x^{2j}. \quad (19)$$

Выполняя операции, предписанные второй из формул (11), перемножим ряды (17), (19) и результат дважды проинтегрируем. В итоге получим

$$b_{n,k}(x) = x^{n+2k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e_{n,k-1,j}}{(n+2k+2j-2)(n+2k+2j-1)}\, x^{2j}, \quad (20)$$

где $e_{n,k-1,j} = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \frac{2^{2(j-i)}}{(2(j-i))!} d_{n,k-1,j}$.

Сопоставляя между собою формулы (18) и (20), для искомых коэффициентов получаем рекуррентную формулу

$$d_{n,k,j} = \frac{1}{(n+2k+2j-2)(n+2k+2j-1)} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \frac{2^{2(j-i)}}{(2(j-i))!} d_{n,k-1,j}.$$

Для полной определенности осталось указать начальные значения $d_{n,0,j}$ $(j = 0,1,2,...)$. Сравнивая выражение для начальной функции $b_{n,0}(x)$, определенной первой из формул (11), со значением, полученным по формуле (18), когда $k = 0$, будем иметь $x^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} d_{n,k,j}\, x^{2j} = x^{n-1}$. Отсюда находим: $d_{n,0,0} = 1;\ d_{n,0,j} = 0\ (j = 1,2,3,...)$.

Окончательно фундаментальные решения (4) уравнения (2) с учетом (18) предстанут в виде

$$y_n(x) = x^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p^k\, d_{n,k,j}\, x^{2(k+j)}\quad (n = 1,2).$$

При этом $y_1(x) -$ четное решение, а $y_2(x) -$ нечетное.

Выводы и дальнейшие перспективы развития в данном направлении. Таким образом, определены фундаментальные решения уравнения Матье при нулевом параметре a и произвольном параметре q с использованием метода прямого интегрирования. Для практического применения полученных результатов необходимо только указать эффективный метод численной реализации алгоритма решения, подобно тому, как это показано в [8, 10]. Изложенные принципы определения фундаментальных решений частного случая уравнения Матье могут быть использованы для решения уравнения Матье при произвольных параметрах a и q.

Решение уравнения Матье имеет важнейшее прикладное значение, поскольку позволяет исследовать параметрический резонанс, который характеризуется сложным характером взаимодействия конструкции и набегающего потока и, в общем случае, связан с изменением во времени параметров динамической системы, приводящим к увеличению амплитуды колебаний. Например, вследствие изменения силы натяжения вант подвесного моста происходит возбуждение колебаний пролетных строений. Этот же эффект наблюдается в популярных сегодня навесных фасадных системах, крепящихся на так называемую подсистему — набор продольных и поперечных линейных элементов, передающих усилия с панелей обшивки на несущую конструкцию самого здания.

Список использованных источников

1. Пановко, Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем [Текст] / Я.Г. Пановко. — М.: Физматгиз, 1960. — 193 с.
2. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1967. – 301 с.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1974. — 297 с.
4. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции [Текст] / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. — М.: Физматлит, 1963. — 500 с.
5. Ватсон, Дж. Н. Теория бесселевых функций [Текст] / Дж. Н. Ватсон. — М.: Иностранная литература, 1949. – Ч. 1. — 799 с.
6. Ishibashi K. Simple conditions for parametrically excited oscillations of generalized Mathieu equations / K. Ishibashi, J. Sugie // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — Volume 446, Issue 1, 1 February 2017. — P. 233–247.

7. Gadella M. Periodic analytic approximate solutions for the Mathieu equation / M. Gadella, H. Giacomini, L.P. Lara // Applied Mathematics and Computation, 271 (2015). — P. 436–445.

8. Mohamad M.A. Sapsis Probabilistic response and rare events in Mathieu's equation under correlated parametric excitation / M.A. Mohamad, T.P. Sapsis // Ocean Engineering Volume 120, 1 July 2016. — P. 289–297.

9. Крутий, Ю. С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости [Текст] / Ю. С. Крутий // Строительная механика и расчет сооружений. — 2010. — № 6. — С. 22–29.

10. Крутий, Ю. С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости (продолжение) [Текст] / Ю. С. Крутий // Строительная механика и расчет сооружений. — 2011. — № 2. — С. 27 – 33.

11. Krutiy Yu. S. Forced harmonic oscillations of the Euler-Bernoulli beam with resistance forces / Yu. S. Krutiy // Odes'kyi Politechichnyi Universytet. Pratsi. Machine building. Process Metallurgy: materials Science. — Odessa, 2015. — № 3(47). — P. 9–16.

12. Крутій, Ю. С. Точний розв'язок диференціального рівняння вимушених поздовжніх коливань стержня з довільними неперервними параметрами [Текст] / Ю. С. Крутій // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки. — Хмельницький, 2015. — № 6. — С. 23–29.

13. Крутій, Ю. С. Чисельна реалізація аналітичного розв'язку задачі про вільні коливання прямокутної пластини, що лежить на змінній пружній основі [Текст] / Ю.С. Крутій, М. Г. Сур'янінов // Наукові нотатки: міжвуз. зб. Сер. Технічні науки. — Луцьк, 2016. — №2 (54) — С. 167–171.

14. Крутій, Ю. С. Згин кругової циліндричної оболонки зі змінною товщиною [Текст] / Ю. С. Крутій, Н. Г. Сур'янінов // Вісник Хмельницького національного університету. Сер. Технічні науки. — Хмельницький, 2016. — №2 (235). — С. 116–121.

15. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / М. В. Федорюк. — М.: Наука, 1985. — 448 с.

16. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц [Текст] / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Крутій Юрій Сергійович, д-р техн. наук, проректор Одеської державної академії будівництва та архітектури. Тел.: (093) 501-85-10. E-mail: yuriy.krutiy@mail.ru.

Сур'янінов Микола Георгійович, д-р техн. наук, завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури. Тел.: (050) 333-37-54. E-mail: marshall@te.net.ua.

Krutiy Yuriy, Dr. Sc. Science, Vice-rector Odessa State Academy of Construction and Architecture. Tel.: (093) 501-85-10. E-mail: yuriy.krutiy@mail.ru.

Suryaninov Nikolay, Dr. Sc. Science, Head of Structural Mechanics Odessa State Academy of Construction and Architecture. Tel .: (050) 333-37-54. E-mail: marshall@te.net.ua.

Стаття прийнята 30.01.2017 р.