

УДК 624.04:681.324.06:721.011.1      DOI: <https://doi.org/10.18664/1994-7852.167.2017.97206>

## **НОВЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ**

Д-р техн. наук В. С. Шмуклер (ХНУГХ им. А. Н. Бекетова)

## **НОВІ ЕНЕРГЕТИЧНІ ПРИНЦИПИ РАЦІОНАЛІЗАЦІЇ КОНСТРУКЦІЙ**

Д-р техн. наук В. С. Шмуклер (ХНУМГ ім. О. М. Бекетова)

## **NEW ENERGY PRINCIPLES OF STRUCTURES RATIONALIZATION**

**Dr. of sciences V. S. Shmukler**

*В статье рассматривается построение метода прямого проектирования конструкций, основанного на эксплуатации компилятора, фундированного методом конечных элементов и методом адаптивной эволюции. На приведенных тест-примерах показаны приоритеты подхода и особенности получаемых конструктивных реализаций. Обозначена связь известных критериев рационализации параметров конструктива с новыми критериями, введенными в работе. Полученные результаты являются основой алгоритма машинного проектирования конструкций с улучшенными характеристиками.*

**Ключевые слова:** энергетический портрет конструкции, плотность потенциальной энергии деформации, равнопрочность, критерий нормируемого состояния.

*У статті розглядається побудова методу прямого проектування конструкцій, основаного на експлуатації компілятора, фундованого методом скінченних елементів і методом адаптивної еволюції. На наведених тест-прикладях показані пріоритети підходу й*

особливості отриманих конструктивних реалізацій. Зазначений зв'язок відомих критеріїв раціоналізації параметрів конструктиву з новими критеріями, що введені до роботи. Отримані результати є основою алгоритму машинного проектування конструкцій з покращеними характеристиками.

**Ключові слова:** енергетичний портрет конструкції, щільність потенціальної енергії деформації, рівномірність, критерій нормованого стану.

*This paper examines the method of direct design of structures, which is based on usage of the compiler founded by finite element method (FEM) and method of adaptive evolution (MAE). In this connection, the concept of the reference stress-strain state of the system formed by sequential build its energy equally strong counterpart is introduced. In this case, the refinement exposed, in general, not only the geometry, but also the physical and mechanical properties of elements. At the same time, it has the opportunity to varying characteristics such as coordinates of the bearing design, constraint type, load location, and others. The result of indicated approach is to build an energetic portrait of the system, including the definition of the system topology, characterized by a minimum value of the accumulated during deformation, potential energy and uniform (quasiuniform) distribution of potential energy density. In the above test examples illustrated approach priorities and features of derived implementations Relationship between known criteria of structure parameters rationalization and new ones introduced in this paper is denoted. Noticed reference stress-strain state of the system is the first approach of the formation of the final decision. Therefore, in the paper, based on the exploitation of Kieffer-Johnson method a sequence of procedures for its numerical implementation is revealed. Derived results are the basis for CAD algorithm design of structures with improved characteristics.*

**Keywords:** energetic portrait of structures, density of strain energy, uniform strength, normalized state criterion.

**Введение.** Дуализм мира предопределяет прямой поиск конструктивных решений механических систем, развивающихся в направлениях:

- создание элементов (конструкций) с максимальной несущей способностью и/или жесткостью при заданном расходе материалов;

- создание элементов (конструкций) с минимальным расходом материалов при заданном ресурсе.

В обоих случаях проблема сводится к постановкам и решениям нелинейных задач рационализации (оптимизации). Как известно, степень сложности применяемых методов и алгоритмов реализации, в этом случае, существенно выше, чем при проверочном (традиционном) подходе. Кроме того, формируемые решения непосредственно связаны с конкретными условиями нагружения и опирания конструктива, что сужает область их

применения. Последнее являлось поводом поочередно наступавших упадка либо ренессанса данного направления. Тем не менее исчерпание ресурсов всех видов на фоне достижений информатики (переход от потребления и переработки материи к работе с информационными потоками [7]) обуславливают новый виток в построении или эксплуатации идей прямого проектирования. Что может быть интересней, чем взамен получения ответа об удовлетворении всех ограничений задачи (обратный подход) создание образа (в смысле геометрии, а иногда и физики) конструкции? Однако совершенно очевидно, что подобная трактовка предполагает формулирование соответствующих критериев в логически обоснованных и физически оправданных терминах. Естественно, в этом случае, обратиться к галилеевским «...не знаете, как сделать – спросите у Природы...» и

«...нельзя безопасно эксплуатировать конструкцию, если не знать, как она будет умирать...», т.е. использовать кеплеровские «...их величества Аналогии...» [6,14].

Позитивность сказанному можно найти в новых положениях, базирующихся на энергетическом подходе, фундированном принципом возможных перемещений Ж. Л. Лагранжа [6,16].

#### Цель и задачи исследования.

Идеология постановок задач прямого проектирования, излагаемая далее, предполагает (пусть и приближенно) отображение двух обстоятельств:

- введение в качестве критерия единой функции цели;
- введение в ограничения изопериметрического условия, связанного с управлением напряженно-деформированным состоянием (НДС) системы.

В этом случае, как известно, может быть достигнуто значительное упрощение постановок задач рационализации параметров конструктива. Здесь предполагается, что единообразная запись функции цели отображает возможность приближенной эквивалентной замены традиционных критериев (стоимость, вес, объем и т.д.) одним, связанным при этом с характером и особенностями НДС. Аналогичное требование предъявляется и к ограничениям, задающим управление НДС.

В свою очередь виртуальное многообразие ограничений, описывающих область допустимых решений (ОДР), предопределило построение процедуры, состоящей из двух этапов [16]:

- поиск эталонного решения;
- формирование окончательного решения.

При этом представилось целесообразным для построения эталонного решения использовать новые положения, основанные на энергетических принципах, а именно [6]:

- утверждения о том, что для регулируемых систем с постоянным объемом материала, числом внешних и

внутренних связей (внешние параметры) под действием статической внешней нагрузки – собственного веса, потенциальная энергия деформации (ПЭД) после перестройки достигает нижней грани на рациональном сочетании величин геометрических параметров:

$$U = \inf_{\alpha} U(\alpha^k), \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (1)$$

где  $U$  – ПЭД;  $k$  – номер варианта сравнения;  $\alpha \in M$ ;  $M$  – множество допустимых значений внешних геометрических параметров.

Положение (1) может быть распространено на случай присутствия на множестве виртуальных загрузок какого-либо превалирующего. В частности при компоновке тонкостенного элемента, испытывающего деформацию изгиба с кручением, можно обнулить (минимизировать) крутящий момент за счет прохождения вектора нагрузки через центр изгиба, что будет соответствовать выполнению (1). Результатом здесь будет отказ от формирования элемента, имеющего замкнутый контур (рис. 1) [8,15];

- требования изоэнергетичности состояния системы (конструкции), т.е. такого, при котором

$$e[\{\bar{x}\}] = const, \quad (2)$$

где  $e$  – плотность потенциальной энергии деформаций (ППЭД);

$\{x\}$  – вектор внутренних параметров.

Решение практических задач с критерием (1) в определенной степени подтверждает эффективность его эксплуатации, а также возможность регулирования не только геометрическими, но и физико-механическими характеристиками системы [1,6,16-18].

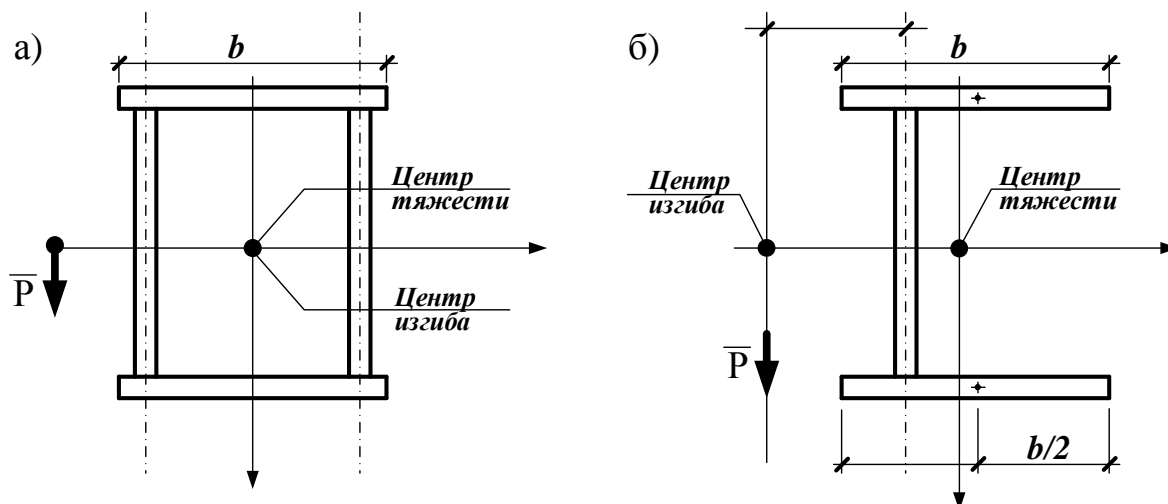


Рис. 1. Сечения элементов, испытывающих изгиб с кручением:  
 а – замкнутый профиль (традиционное решение);  
 б – открытый профиль (рациональное решение)

Примем, в духе [6], что под внешними экстенсивными параметрами понимаются параметры, которые определяют сопротивляемость системы без изменения общего объема материала (габариты элементов системы, координаты опорных связей и мест приложения нагрузок и т.п.), а внутренние интенсивные параметры определяют топологию, объем, а также свойства материалов.

Следует также отметить, что следствием первого положения, кроме представления (1), является следующее:

- при лавинообразном устранении связей, вследствие появления пластических шарниров, вплоть до появления предельного состояния, когда система превращается в механизм, ПЭД возрастает и достигает верхней границы [7]:

$$U_u = \sup U, \quad (3)$$

где  $U_u$  – предельная величина ПЭД.

Условие (3) может быть использовано при определении наиболее опасного сочетания нагрузок в случае многообразия загрузений. Очевидно, что наиболее

опасному загрузению (при упругом деформировании) будет соответствовать большая величина ПЭД.

Следствием критерия (2) является то, что при  $e=e_u$  во всех точках конструкции достигается глобальный минимум расхода материалов (1). Здесь фундаментальная структурообразующая величина  $e_u$  – ресурс, суть мера вязкости материала или предельная плотность энергии деформирования [12,13]. Она определяется работой, затрачиваемой на деформацию образца вплоть до его разрушения, приходящейся на единицу объема и измеряемой площадью индикаторной диаграммы деформирования материала. С величиной ресурса связано очень ценное качество конструкции – резильянс, определяемый количеством упругой энергии, которое можно запасти в ней, не причиняя повреждения [16].

В свою очередь изоэнергетичность, порождаемая (2), как рациональная форма существования искусственных элементов, обеспечивает наиболее приемлемое распределение материала, а также его эффективную работу в конструкции. Применяя к (2) итерационный подход,

базирующийся на методе адаптивной эволюции (МАЭ), для какого-либо геометрического или физико-механического параметра конструкции, можно записать

$$h_{i+1} = h_i [e_i e_{iu}^{-1}]^\gamma, \quad (4)$$

где  $h$  – геометрический (физико-механический) параметр системы;

$i$  – номер итерации;

$\gamma \in (0,1)$  – характеристика адаптивной эволюции, отражающая скорость сходимости процедуры МАЭ.

Введенные положения позволяют не только обозначить эталонное решение, но и, что является весьма важным, построить энергетический портрет конструкции. Под энергетическим портретом конструкции понимается 3D-построение и отображение поля плотности энергии деформации с одновременным определением ПЭД. Данное обстоятельство, наряду с определением рациональной топологии системы (не только форма, но и содержание), предопределяет установление предельного состояния как для структурных элементов конструкции (например конечных элементов), так и для системы в целом. Кроме того, при условии сходимости процедуры (4) происходит отсеив ненатуральных (паразитирующих) элементов системы. Отметим, что, кроме минимизации расхода материалов, критерии (1)÷(2) могут быть использованы для приближенной оценки некоторых важных механических характеристик. В связи с чем рассмотрим иллюстративный пример. Пусть рассматриваются 13 квадратных изгибаемых конструктивно анизотропных пластин, имеющих одинаковый объем (расход материалов). Все пластины оперты по контуру шарнирно и несут равномерно распределенную единичную нагрузку. У каждой пластины

задана эксклюзивная геометрия подкрепляющих ребер.

В духе введенных критериев, ставится задача определения той топологии ребер, для которой, во-первых, выполняется критерий (1), а во-вторых, проводится оценка выполнения ограничения (управления) (2). Решение рассматриваемых задач реализовано в среде ПК ЛИРА [8]. Результаты решения приведены на рис. 2.

Анализируя построенную диаграмму, можно отметить, что пятому варианту топологии пластины соответствует минимальное значение ПЭД. Далее для всех рассмотренных вариантов были оценены частоты собственных колебаний основного тона и обертонов, а также максимальные прогибы пластин.

Как видно из графиков, приведенных на рис. 3, 4, пятому варианту топологии плиты соответствует не только минимальное значение ПЭД, но и максимальное значение частоты собственных колебаний основного тона, практически и обертонов, а также минимальное значение прогиба, что говорит о максимальной изгибной жесткости этой пластины. Таким образом, допустимо констатировать (хотя и с известной степенью осторожности), что критерий (1) может использоваться как универсальный. Удовлетворение условию (2) реализуется в том числе и за счет придания подкрепляющим ребрам переменной жесткости [16-18]. При этом для обеспечения технологичности решений (например для железобетонных или сталежелезобетонных конструкций) используются захороняемые вкладыши-пустотообразователи (рис. 5) [6]. Для металлических элементов, в этом случае, уместна установка конструктивов с переменным сечением и/или использованием металлов разных марок.

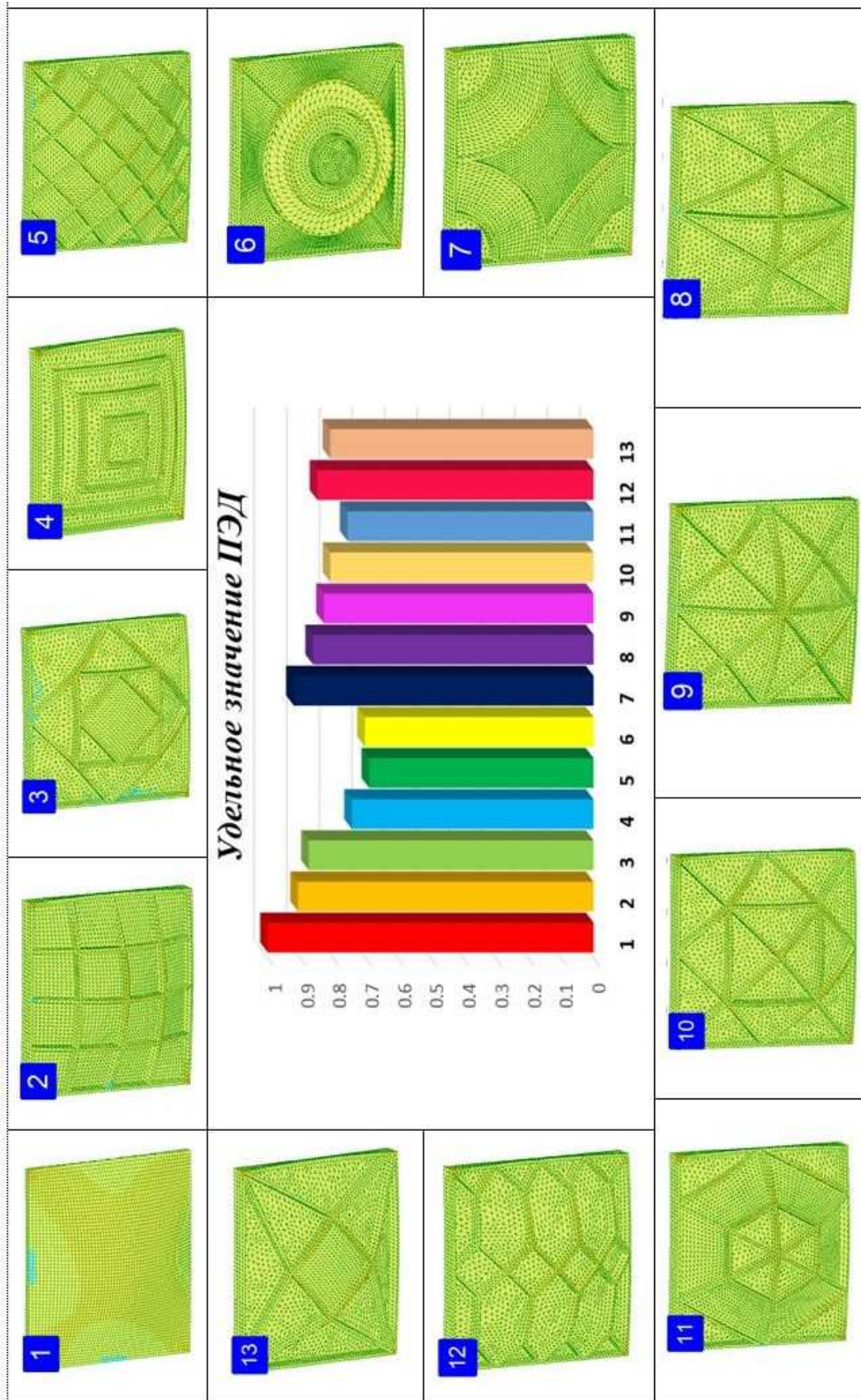


Рис. 2. Иллюстрированный пример

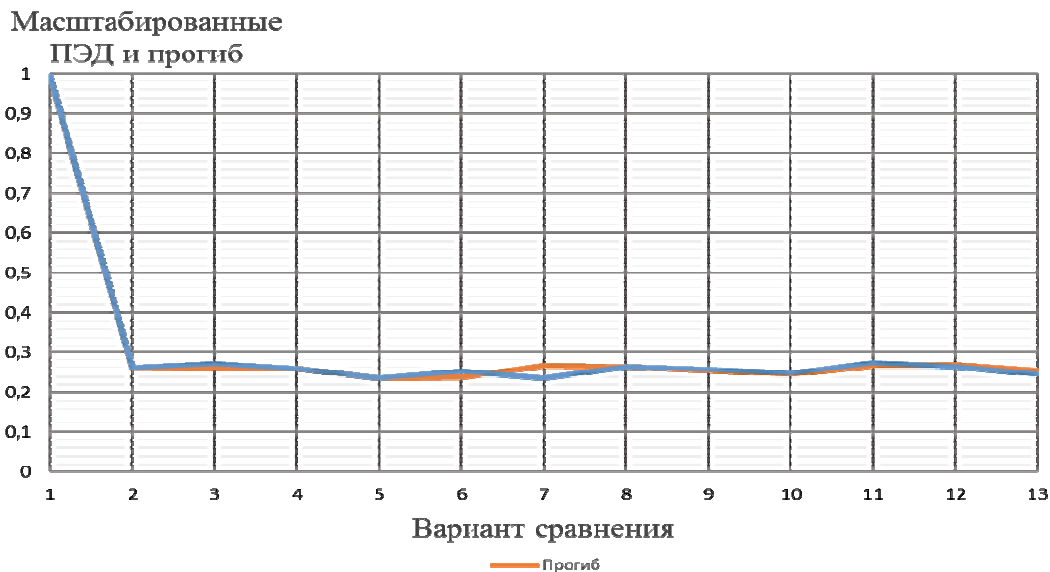


Рис. 3. Максимальный прогиб и ПЭД для вариантов сравнения

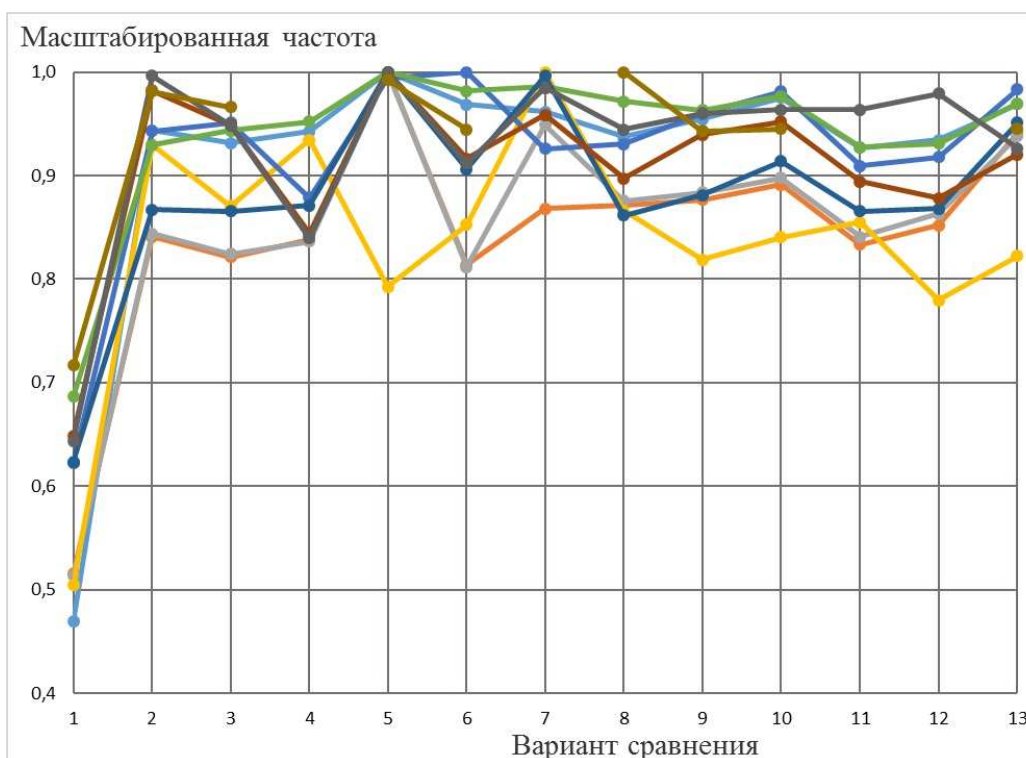


Рис. 4. Частоты собственных колебаний рассматриваемых пластин

Условия (2) и (4) содержат величину предельной плотности потенциальной энергии  $e_n$ . С этой характеристикой связано понятие нормируемого значения плотности потенциальной энергии деформации  $e_n$  или,

что тоже самое – нормируемого потенциала деформации [12], необходимого для построения эталонного решения (энергетически равнопрочная система).

Далее, в духе [6; 16], обозначим частные (парциальные) величины ППЭД так, что

$$e_n = e_n(e_{nc}; e_{nt}; e_{nsh}), \quad (5)$$

где  $e_{nc}; e_{nt}; e_{nsh}$  – нормируемые величины ППЭД для деформаций растяжения, сжатия и сдвига соответственно.

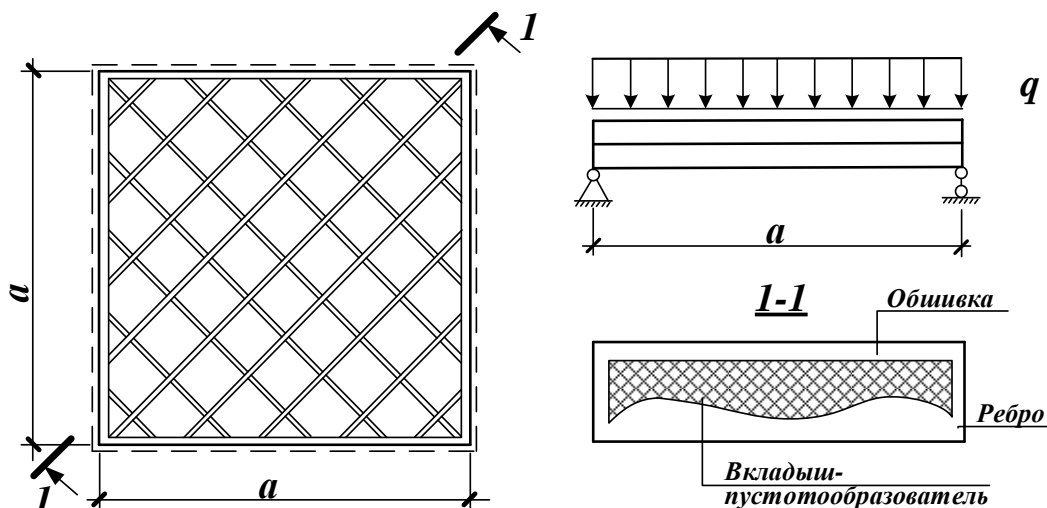


Рис. 5. Оребренная пластина с ребрами переменной жесткости

При этом каждую частную ППЭД представим в виде

$$e_{nc} = \frac{9}{2} K \cdot \varepsilon_0^2 + \int_0^{\varepsilon_{nc}} \sigma_c d\varepsilon_c, \quad (6)$$

$$e_{nt} = \frac{9}{2} K \cdot \varepsilon_0^2 + \int_0^{\varepsilon_{nt}} \sigma_t d\varepsilon_t, \quad (7)$$

$$e_{nsh} = \int_0^{\varepsilon_{nsh}} \tau d\gamma, \quad (8)$$

где  $K = \frac{E_0}{3(1-2 \cdot \nu)}$  – объемный модуль деформаций;

$E_0$  – начальный модуль деформаций 1-го рода материала;

$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} I_1(T_\varepsilon); I_1(T_\varepsilon)$  – первый инвариант тензора деформаций;

$\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_c); \sigma_t = \sigma_t(\varepsilon_t); \tau = \tau(\gamma)$  – заданные (известные) диаграммы материала, построенные для деформаций сжатия, растяжения, сдвига;

$\varepsilon_{nc}; \varepsilon_{nt}; \lambda_n$  – нормируемые значения деформаций на сжатие, растяжение, сдвиг.

Первое слагаемое в (6), (7) представляет собой удельную потенциальную энергию изменения объема, а второе – удельную потенциальную энергию изменения формы.

Здесь считается, что диаграммы материалов могут быть получены непосредственно из соответствующих экспериментов, а нормируемые значения деформаций представлены выражением

$$\varepsilon_{nk} = \gamma_k \varepsilon_{ku}; \gamma_k \in (0,1),$$

где  $k$  – индекс, последовательно принимающий значения,  $k=cvtvsh$ ,



соответствующий деформации сжатия, растяжения, сдвига;

$\gamma_k$  – статистически обоснованный коэффициент запаса.

Назначая разные значения  $\gamma_k$  для различных элементов системы, появляется возможность управления последовательностью выхода их из строя. Данное обстоятельство предопределяет в том числе эксплуатацию теории очередей, а также репрезентативное резервирование [9];

$\varepsilon_{ku}$  – предельная деформативность.

При наличии связи  $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$  выражениями (6)÷(8) может быть учтена дилатансия.

Диаграмму деформирования материала (рис. 6) представим в виде полинома седьмой (нечетной) степени:

$$\sigma = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_3 \varepsilon^3 + \alpha_5 \varepsilon^5 + \alpha_7 \varepsilon^7. \quad (9)$$

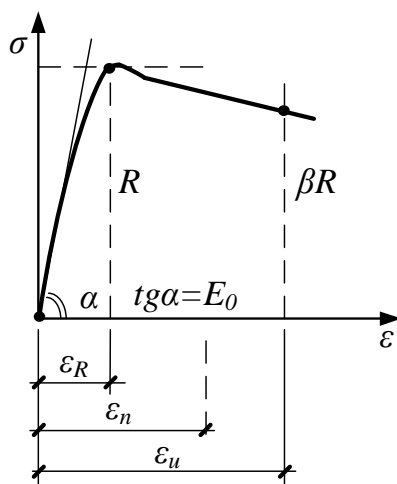


Рис. 6. Диаграмма деформирования материала

В (9) неизвестные коэффициенты  $\alpha_j$  ( $j=1,3,5,7$ ) можно выразить через характеристики диаграммы:

$$\{\alpha\}^T = \{E_0; R; \varepsilon_R; \varepsilon_u; \beta\}, \quad (10)$$

- где  $E_0$  – начальный модуль деформаций;
- $R$  – предел прочности;
- $\varepsilon_R$  – деформация, соответствующая пределу прочности;
- $\varepsilon_u$  – предельная деформативность;
- $\beta$  – напряжение, соответствующее предельной деформативности.

Перечисленные характеристики, в общем случае, являются функциями температуры, времени и других

параметров, что подтверждено значительным количеством исследований [12; 13].

Для определения коэффициентов  $\alpha_j$  используются следующие условия:

$$\begin{aligned} \text{при } \varepsilon = 0; \sigma = 0; \frac{d\sigma}{d\varepsilon} &= E_0; \\ \text{при } \varepsilon = \varepsilon_R; \sigma = R; \frac{d\sigma}{d\varepsilon} &= 0; \\ \text{при } \varepsilon = \varepsilon_u; \sigma &= \beta \cdot R. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (9) в (11) и решая систему линейных уравнений, определяются коэффициенты  $\alpha_j$  (таблица).

Коэффициенты полинома (9)

Коэф-фициент	Значение
$\alpha_3 \cdot E_0^{-1}$	$\frac{\varepsilon_u^4}{2(\varepsilon_u^2 - \varepsilon_R^2)^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon_R^2} \left( \frac{R}{E_o \varepsilon_R} - 1 \right) \left( 5 - 7 \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_u^2} \right) - \frac{1}{\varepsilon_R^2} \left( \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_u^2} - 1 \right) + \frac{2\varepsilon_R^4}{\varepsilon_u^6} \left( \frac{\beta R}{E_o \varepsilon_u} - 1 \right) \right]$
$\alpha_5 \cdot E_0^{-1}$	$\frac{\varepsilon_u^4}{2(\varepsilon_u^2 - \varepsilon_R^2)^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon_R^4} \left( 7 \frac{\varepsilon_R^4}{\varepsilon_u^4} - 3 \right) \left( \frac{R}{E_o \varepsilon_R} - 1 \right) - \frac{1}{\varepsilon_R^4} \left( 1 - \frac{\varepsilon_R^4}{\varepsilon_u^4} \right) - \frac{4\varepsilon_R^2}{\varepsilon_u^6} \left( \frac{\beta R}{E_o \varepsilon_u} - 1 \right) \right]$
$\alpha_7 \cdot E_0^{-1}$	$\frac{\varepsilon_u^4}{2(\varepsilon_u^2 - \varepsilon_R^2)^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon_R^4 \varepsilon_u^2} \left( \frac{R}{E_o \varepsilon_R} - 1 \right) \left( 3 - 5 \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_u^2} \right) - \frac{1}{\varepsilon_R^4 \varepsilon_u^2} \left( \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_u^2} - 1 \right) + \frac{2}{\varepsilon_u^6} \left( \frac{\beta R}{E_o \varepsilon_u} - 1 \right) \right]$

Зависимость (9) удобно представить в виде

$$\tilde{\sigma} = \tilde{E}_0 \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \Psi(\tilde{\varepsilon}), \quad (12)$$

где  $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{R}$ ;  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u}$ ;  $\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon} \in (0,1)$ ,

$$\tilde{E}_0 = \frac{E_0 \varepsilon_u}{R};$$

$$\Psi(\tilde{\varepsilon}) = 1 + \alpha_3 \cdot \varepsilon_u^2 \tilde{\varepsilon}^2 + \alpha_5 \cdot \varepsilon_u^4 \tilde{\varepsilon}^4 + \alpha_7 \cdot \varepsilon_u^6 \tilde{\varepsilon}^6$$

Таким образом, располагая вектором (10), имеется возможность представить диаграмму состояния для частных видов деформирования в виде (12). Достоинствами (12) является простота и физическая прозрачность.

Представим теперь нормируемую ППЭД в виде [6]

$$e_n = a_1 + a_2 \chi_\varepsilon^2 + a_3 \chi_\varepsilon^3, \quad (13)$$

где  $\chi_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$ ,  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$  –

главные линейные деформации;

$\chi_\varepsilon$  – параметр Лоде-Надаи деформированного состояния;

при  $\chi_\varepsilon = -1$ ;  $e_u = e_{tn}$ ;

при  $\chi_\varepsilon = 1$ ;  $e_u = e_{en}$ ;

при  $\chi_\varepsilon = 0$ ;  $e_u = e_{shu}$ .

После определения  $a_1$ ;  $a_2$ ;  $a_3$  получим [16]

$$e_n = 0,5 \chi_\varepsilon [(\chi_\varepsilon + 1)e_{nc} + (\chi_\varepsilon - 1)e_{nt}] + (1 - \chi_\varepsilon^2)e_{nsh}. \quad (14)$$

Выражение (14) является критерием, определяющим эксплуатационное состояние рационализированного элемента. В частном случае, когда верхние пределы интегрирования в (6)-(8) равны

предельным деформациям, выражение (4) предопределяет предельное состояние в локальной области (точка, конечный элемент). При  $e_{nc} = const$ ;  $e_{nt} = const$ ;

$e_{nsh}=const$  критерий (14) совпадает с критерием построенным в [6].

В свою очередь внеинтегральные члены в (6)÷(7) можно представить в виде

$$\frac{9}{2} K \cdot \varepsilon_0^2 = \frac{E_0}{6(1-2\nu)} \cdot I_1^2(T_\varepsilon). \quad (15)$$

Здесь следует отметить, что без внесения значительной погрешности в решение объемная деформация  $\varepsilon_0$  в большинстве случаев может приниматься равной нулю. Интегральные члены в (6)÷(8), благодаря представлению (9), вычисляются точно.

Важным моментом является то, что предлагаемый подход предполагает эксплуатацию в основном 3D-конечно-элементных моделей [10].

При этом, если в конечном элементе  $e_i > e_{in}$ , он выключается из работы.

Располагая алгоритмами, устанавливающими последовательное объединение смежных отбракованных элементов, появляется возможность построения поверхностей расчленения (разрушения) конструкции, т. е. установления последовательности перехода от разрушения в локальной области к глобальному виртуальному коллапсу.

**Эталонное решение.** Как отмечалось ранее, эталонное решение строится на базе зависимостей (1), (2) с использованием итерационной процедуры (4). Специфической особенностью здесь является тот факт, что в качестве параметров управления выбираются физико-механические параметры конечного элемента [16]:

$$C_{i+1}^L = (e_L e_n^{-1}) C_i^L, \quad (16)$$

где  $i$  – номер итерации;

$C_i^L$  – физико-механический параметр в общем случае анизотропного  $L$ -го конечного элемента на  $i$ -м шаге итерации.

В случае изотропного тела зависимость (16) принимает вид

$$E_{i+1}^L = (e_L e_n^{-1}) E_i^L, \quad (17)$$

где  $E_i^L$  – модуль деформаций 1-го рода (внутренний параметр).

При этом коэффициент поперечной деформации может (при необходимости) приниматься по умолчанию как неварьированный в силу его незначительной изменчивости  $\nu \in (0;0,5)$ . В окончательном виде эталонное решение представляет собой поле модулей деформаций, соответствующее энергетически равнопрочному элементу.

Чаще всего процедура (17) является вложенной, а внешняя процедура отображает удовлетворение критерию (1), реализуя перебор внешних параметров.

Используя далее следствие локального закона сохранения потенциальной энергии деформаций, запишем [6]

$$V_N^L = [ E_N^L ( E_0^L )^{-1} ] V_0^L, \quad (18)$$

где  $V_0^L$  – стартовый объем  $L$ -го конечного элемента (КЭ);

$V_i^L$  – объем энергетически равнопрочного  $L$ -го КЭ;

$E_0^L$  – начальный модуль деформаций 1-го ряда материала;

$E_N^L$  – модуль деформаций 1-го рода материала на последнем шаге итераций;

$N$  – количество итераций.

Принимая гипотезу о равномерном распределении энергии по степеням свободы, следует пересчитать координаты сетки КЭ на основе (18).

Данная логико-вычислительная процедура позволяет получить геометрический образ энергетически равнопрочной конструкции (рис. 7). Далее,

как правило, производится преобразование (огрубление) полученной формы с целью

обеспечения технологичности изготовления рассматриваемого конструктива.

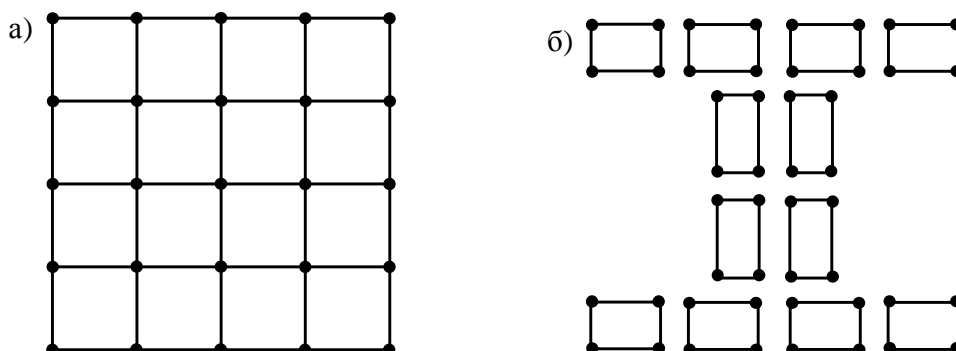


Рис. 7. Трансформация сетки конечных элементов: а – стартовая; б – результирующая

Допустимо указать некоторые полезные для вычислений нюансы, приводящие к трансформации стартовой сетки конечных элементов (рис. 7, 8). Если обозначить начальные размеры КЭ вдоль соответствующих осей декартовой системы XYZ через  $\lambda_x$ ;  $\lambda_y$ ;  $\lambda_z$  (для других систем координат рассуждения остаются в силе), то после выполнения процедуры (18) они станут равными [13]:

$$\begin{aligned} \lambda'_x &= \lambda_x(1 + \varepsilon_x); \\ \lambda'_y &= \lambda_y(1 + \varepsilon_y); \\ \lambda'_z &= \lambda_z(1 + \varepsilon_z). \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\varepsilon_x$ ;  $\varepsilon_y$ ;  $\varepsilon_z$  – компоненты тензора деформаций.

Относительное изменение объема КЭ при этом составит

$$\Delta \bar{V} = I_1(T_\varepsilon), \quad (20)$$

где  $\Delta \bar{V}$  – относительное изменение объема КЭ.

В случае отказа принятия концепции о равномерном распределении энергии по степеням свободы рассматривается

возможность замены выражений (19) на следующие [6]:

$$\begin{aligned} \lambda'_x &= \varphi_1 \lambda_x(1 + \varepsilon_x); \\ \lambda'_y &= \varphi_2 \lambda_y(1 + \varepsilon_y); \\ \lambda'_z &= \varphi_3 \lambda_z(1 + \varepsilon_z). \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\varphi_m = [e_L \cdot e_n^{-1}] \psi_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ ,  
 $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 1$ ;  $\psi_m \in (0;1)$ ;

$$\psi_m = \frac{|\sigma_m|}{\sum_{m=1}^3 |\sigma_m|},$$

$\sigma_m$  – главные напряжения.

Как следует из (21), изменение геометрии КЭ будет происходить пропорционально величинам главных напряжений, что логически оправдано.

Как отмечалось выше, выполнение критерия (1) предопределяет возможность использования всего, допустимого для конкретных условий, спектра конструктивных решений (изменений способов и мест приложения нагрузки, изменений координат и характера связей, использования предварительного натяжения, изменения жесткостей

отдельных элементов и др.). То есть подобный подход является альтернативой концепции А. Пуанкаре о том, что «посредством интуиции изобретают, а

посредством логики доказывают». Здесь форма и содержание конструкции могут быть получены расчетным путем (рис. 9).

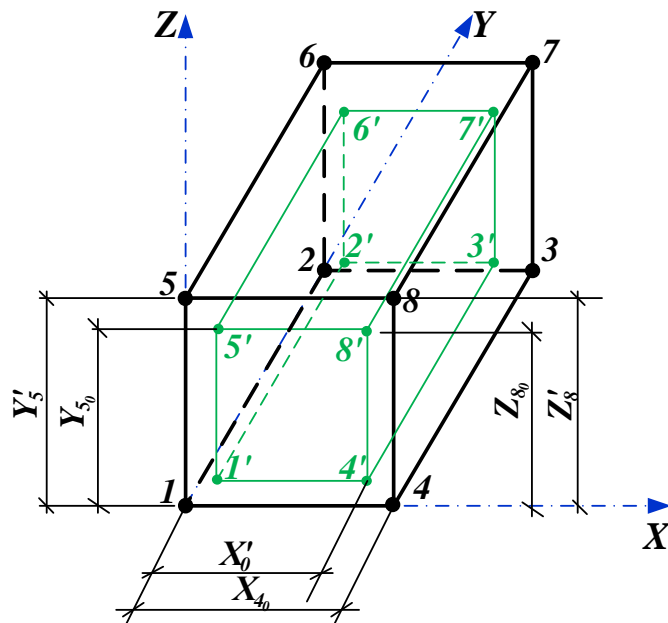


Рис. 8. Виртуальное изменение координат узлов конечного элемента в локальной системе координат (начальные координаты обозначены нулем, полученные в результате расчета – штрихом, цифрами обозначены узлы КЭ)

#### Окончательное решение и выводы.

При наличии в задаче каких-либо дополнительных ограничений (кроме (2)) эталонное решение следует принять за начальное приближение. Далее «новые» ограничения должны быть предоставлены в виде равенств. Затем следует эксплуатация метода Киффера-Джонсона выхода на границу области по заданным дополнительным ограничениям [16]. В этом случае вычислительная процедура выглядит следующим образом. Последовательно для каждого КЭ проверяется выполнение «новых» ограничений. В случае их строгого выполнения модули  $E_i^L$  остаются без изменений. При невыполнении ограничений производится увеличение этих параметров до выполнения всех

ограничений. Подобный алгоритм обеспечивает строгое выполнение всех неравенств и, как минимум, одного как равенства (выход на границу области).

Обозначенная итерационная процедура реализует решение нелинейных задач рационализации параметров конструкций. Основой ее применения служит модель деформируемого тела А.А.Ильюшина – И.А.Биргера. Суть ее сводится к условно эквивалентной замене исходной нелинейно и в общем случае неупруго деформируемой среды линейной, но неоднородной. Неоднородность здесь определяется изменчивостью параметров, описывающих физико-геометрические атрибуты системы и являющихся функциями компонент, обозначающих напряженно-деформированное состояние.

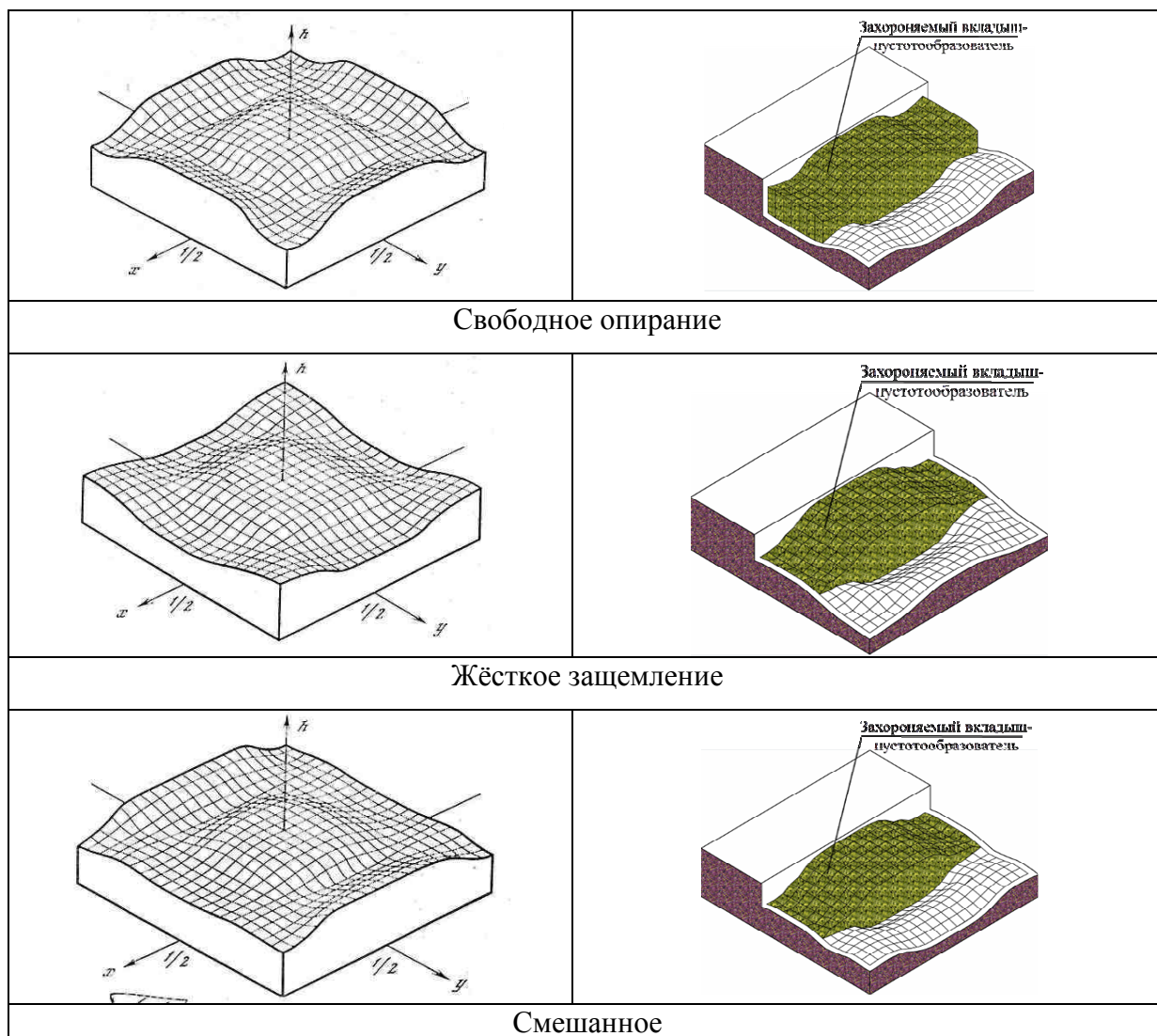


Рис. 9. Равнопрочные пластины по [2] слева и плиты со сложной внутренней геометрией справа

К достоинствам этой модели в первую очередь следует отнести её физическую прозрачность, стандартность алгоритмов учёта нелинейностей разных видов (физической, геометрической, конструктивной и т.д.), пригодность для решения как обратных, так и прямых задач [19]. В целом данная модель имеет сугубо рациональный характер и полностью коррелирует с общей формулировкой, данной Н. Бейли: «..... объект М является моделью объекта А относительно некоторой системы S характеристик (свойств), если М строится (или выбирается) для имитации А

по этим характеристикам» [4]. В рассматриваемой ситуации в роли А выступает нелинейно деформируемое тело, а в роли М – некоторая линейно деформируемая неоднородная среда, параметры неоднородности S которой уточняются итерационно в зависимости от характера и особенностей напряженно-деформируемого состояния, а также процессов, учёт которых предусмотрен конкретной задачей. Так как компоненты напряженно-деформированного состояния в общем случае меняются от точки к точке, параметры, описывающие среду, будут

являться в конечном итоге функциями координат. Как показывает опыт эксплуатации этой модели её качественная и количественная адекватность существенным образом зависит от видов нелинейностей, вводимых в рассмотрение. Остановимся на одном из нюансов применения данной модели, остающимся, как правило, в стороне от проблемы, обозначающей упомянутую адекватность. Как отмечалось выше, на каждом шаге рассмотренного итерационного процесса используется метод

конечных элементов, представленный, в основном, в форме метода перемещений. При этом для трёхмерного континуума конечно-элементная дискретизация тела предполагает неоднородность среды. Другими словами, физико-геометрические параметры каждого конечного элемента могут быть различными. Тогда в синтезирующие уравнения, записанные, например, для изотропных твёрдых тел, должны входить не только собственно упомянутые параметры, но и производные от них [3,5]:

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda \delta_{ik} \delta_{Lm} + \mu (\delta_{iL} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kL}) \right] \frac{\partial^2 u_L}{\partial x_k \partial x_m} + \\ & + \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \delta_{ik} \delta_{Lm} + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} (\delta_{iL} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{Lk}) \right] : \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_L}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_L} \right) + x_i = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\rho = const$  – плотность материала;  $u_i; u_L; u_m$  – компоненты вектора перемещений;  $\delta_{ik}$  – тензор Кронекера;  $t$  – время;  $\lambda(x_1; x_2; x_3); \mu(x_1; x_2; x_3)$  – аналоги коэффициентов Ляме, являющиеся функциями координат  $x_1; x_2; x_3$ .

Однако библиотеки практически всех известных программных средств, фундированных методом конечных элементов, как правило, не содержат элементов, определяемых (22). Их (библиотек) содержимое сводится к ситуации  $\lambda_i = const, \mu_i = const$  ( $i$  – номер конечного элемента), соответствующей известным уравнениям теории упругости и получаемой из (22) как частный случай [11]. Как следствие, и в

особенности когда  $\lambda(x)$  и  $\mu(x)$  имеют разрывный характера, погрешность обсуждаемой модели может быть значительной. Тем не менее линейность модели, её простота и наглядность, возможность управления размерностью пространства переменных, включая оптимизацию учитываемых параметров, доступные средства контроля обычных и экстремальных ситуаций обеспечивают её интегральную адекватность для значительного количества практически важных случаев. Перечисленное предопределяет эффективность использования данной модели в совокупности с алгоритмами итерационного решения сложных нелинейных задач.

### Список использованных источников

1. Бабаев, В. Н. Эффективная система облегченных железобетонных элементов [Текст] / В.Н. Бабаев, В.С. Шмуклер // Бетон и железобетон – взгляд в будущее: науч. тр. III Всерос. (II Междунар.) конф. по бетону и железобетону. – М.: МГСУ, 2014. – Т. 2. – С. 346-356.
2. Баничук, Н. В. Оптимизация форм упругих тел [Текст] / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.

3. К описанию деформирования бетонной среды [Текст] / П.Я. Бернштейн, И.А. Тимко, А.Л. Шагин, В.С. Шмуклер // Сборник сообщений о научно-исследовательских и экспериментально-конструкторских работах. – Харьков: ХГУ, 1971. – Вып. 2. – С. 85-91.
4. Блехман, И. И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов [Текст] / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1976. – 269 с.
5. Бондаренко, В. М. Комплекс программ для расчёта опёртых по контуру пологих оболочек с учётом физической и геометрической нелинейности [Текст] / В.М. Бондаренко, А.Л. Шагин, В.С. Шмуклер. – М.: ОФАП Госстрой СССР, 1975. – 109 с.
6. Васильков, Г. В. Эволюционные задачи строительной механики. Синергетическая парадигма [Текст] / Г. В. Васильков. – Ростов-н/Д: Инфосервис, 2003. – 179 с.
7. Васильков, Г. В. Эволюционная теория жизненного цикла механических систем. Теория сооружений [Текст] / Г. В. Васильков. – М.: ЛКИ, 2008. – 320 с.
8. Городецкий, А. С. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций [Текст] / А.С. Городецкий, В.С. Шмуклер, А.В. Бондарев. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 889 с.
9. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения [Текст]: ГОСТ 27.002-89. – [Введ. 1990-07-01]. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 1990. – 32 с. – (Межгосударственный стандарт).
10. Данилов, А. А. Способы построения трехмерных поверхностных триангуляций и тетраэдральных сеток [Текст] / А. А. Данилов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – СПб: ИТМО, 2010. – Вып. 1(65). – С. 87-92.
11. Ландау, Л. Д. Теория упругости [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 202 с.
12. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст]: учеб. для студентов ВУЗов / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
13. Филин, А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела [Текст] / А. П. Филин. – М.: Наука, 1975. – Т. I. – 832 с.
14. Фридкин, В. М. Формообразование строительных конструкций [Текст] / В.М. Фридкин. – М.: МГСУ, 2011. – 171 с.
15. Пролетное строение открытого несимметричного профиля для грузоподъемного крана [Текст]: а.с. 1541179 СССР, МКИ5 В 66 С 17/00 / В.С. Шмуклер, А.И. Белопольский, Г.Ф. Скала, М.И. Ягудин. – №4294275; заявл. 03.08.87 ; опубл. 07.02.90, Бюл. №5.
16. Шмуклер, В. С. Каркасные системы облегченного типа [Текст] / В.С. Шмуклер, Ю.А. Климов, Н.П. Бурак. – Харьков: Золотые страницы, 2008. – 336 с.
17. Shmukler, V.S. About One Possibility of Compromise-Criterion Construction in Structure Parameter Rationalization Task Dundee / V.S. Shmukler // Proceedings of the International conference – Scotland, 2008. – pp.183-190.
18. Shmukler, V.S. Evolutionist approach in rationalization of building structures / V.S. Shmukler // ISEC-03 Third International Structural Engineering and construction Conference – Shunan, Japan, 2005. – pp.539-545.
19. Shmukler, V.S. Nonlinear analysis of reinforced concrete structures strength. / V.S. Shmukler, I. Luchkovsky // IABS symposium – Shanghai, China, 2004. – Vol. 88. – pp.374-382.

---

Шмуклер Валерій Самуїлович, д-р техн. наук, професор, завідуючий кафедрою будівельних конструкцій Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова. Тел.: (057) 707-33-77. E-mail: konstruktzii@gmail.com.

Shmukler Valery Samuilovich, D. Sc. (Tech.), prof., Head of Building Structures Department by O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. Tel.: (057) 707-33-77. E-mail: konstruktzii@gmail.com.

Стаття прийнята 15.02.2017 р.